

Найти все значения параметра  $a$ , при которых уравнение  $(2a + 3)x^2 + xa + 3a - 1 = 0$  имеет два целых корня.

Ответ:  $-47/31$  и  $-13/9$ .

Решение. Выразим  $a$  через  $x$ :  $a = \frac{1-3x^2}{2x^2+x+3}$ . Пусть  $m, n$  - два разных целых корня при каком-то  $a$ , то есть  $\frac{1-3m^2}{2m^2+m+3} = \frac{1-3n^2}{2n^2+n+3}$ , или, упрощая,  $m = -\frac{11n+1}{3n+1}$ . Это уравнение имеет 4 решения в целых числах  $(-4; -43)$ ,  $(-43; -4)$ ,  $(-3; 16)$ ,  $(16; -3)$ . Других целых решений при  $n$  в интервале от  $-43$  до  $16$  нет (проверяется непосредственно), а вне этого интервала  $m$  лежит между  $-3$  и  $-4$ , а значит, не может быть целым. Таким образом, есть только две возможные неупорядоченные пары целых чисел, дающих одно значение параметра, значения параметра для этих пар указаны в ответе.