О. Б. Полубасов 16.06.2017 г.

===========ММ224===============

ММ224 (6 баллов)

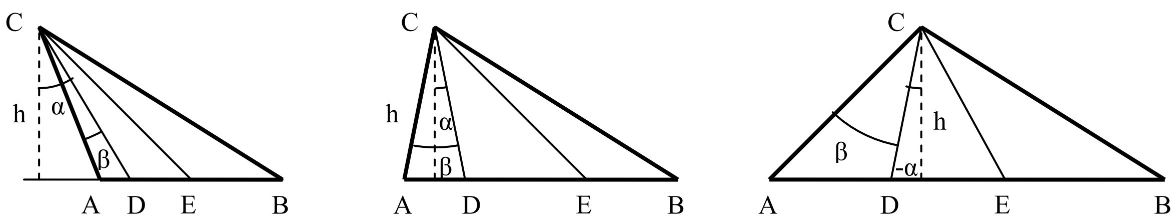
Решения принимаются до 29.09.2017

В задаче, которую задали на дом Пете и Васе, требовалось найти площади треугольников, на которые разбивается исходный треугольник ABC трисектрисами, проведенными из вершины C. При сверке ответов у Пети и Васи совпали значения двух площадей: 2 и 4. Третья площадь у Пети оказалась равной 10, а у Васи – 20. Найти угол C, если известно, что один из учеников получил за домашнее задание пятерку.

==========================

Выбирая между решением с помощью окружностей Аполлония и решением с помощью углов, я всё-таки выбрал углы.

Пусть угол C = 3β, 0 < β < π/3. Трисектрисы разбивают треугольник ABC на треугольники ADC, DEC и EBC. Обозначим высоту, проведённую из вершины C, через h, а угол (со знаком) между высотой и прямой CD – через α. С учётом симметрии, есть только три варианта расположения высоты относительно секторов треугольника (рис. 1. а-в). -β/2 ≤ α < π/2 – 2β.



а) β ≤ α < π/2 – 2β
|CA| < |CD| < |CE| < |CB|

б) 0 ≤ α ≤ β
|CA| ≤ |CE| < |CB|,
|CD| < |CE| < |CB|

в) –β/2 ≤ α ≤ 0
|CD| ≤ |CE| ≤ |CA| ≤ |CB|,
|CD| < |CA|, |CE| < |CB|

Рис. 1. Варианты расположения высоты относительно секторов треугольника ABC.

Можно выписать следующие равенства.

$$|CA| = \frac{h}{\cos(\alpha-\beta)},\ |CD| = \frac{h}{\cos(\alpha)},\ |CE| = \frac{h}{\cos(\alpha+\beta)},\ |CB| = \frac{h}{\cos(\alpha+2\beta)}.$$

$$S_{ADC} = \frac{|CA||CD|\sin\beta}{2},\ S_{DEC} = \frac{|CD||CE|\sin\beta}{2},\ S_{EBC} = \frac{|CE||CB|\sin\beta}{2}.$$

Отношения площадей секторов обозначим через p и r.

$p = \frac{S_{DEC}}{S_{ADC}} = \frac{|CE|}{|CA|} = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}, p > 0$. Заметим, что α ≥ 0 ⇔ p ≥ 1, α ≤ 0 ⇔ p ≤ 1.

$$r = \frac{S_{DEC}}{S_{EBC}} = \frac{|CD|}{|CB|} = \frac{\cos(\alpha+2\beta)}{\cos(\alpha)}, 0 < r < 1.$$

Поскольку |CD| ≤ |CE|, |CB| ≥ |CA|, то $r = \frac{|CD|}{|CB|} \leq \frac{|CE|}{|CA|} = p$.

Обозначим через f и g квадраты синусов углов α и β соответственно.
$f = \sin^2 \alpha$, тогда $\cos \alpha = \sqrt{1-f}$, $\cos \alpha > 0$,
$g = \sin^2 \beta$, тогда $\cos \beta = \sqrt{1-g}$, $\cos \beta > 0$.

Выразим sin(α) через p и g.
Так как $cos(\alpha - \beta) = p\, cos(\alpha + \beta)$, то
$\sqrt{1-f}\sqrt{1-g} + \sin\alpha \sin\beta = p\sqrt{1-f}\sqrt{1-g} - p\sin\alpha\sin\beta$,
$(p-1)\sqrt{1-f}\sqrt{1-g} = (p+1)\sin\alpha\sin\beta$.

Возведём левую и правую части равенства в квадрат.
$(p^2 - 2p + 1)(1 - f)(1 - g) = (p^2 + 2p + 1)fg$,

$f = \frac{(1-g)(p-1)^2}{4pg+(p-1)^2}$,

sin(α) = ±√f. Если p ≤ 1, то sin(α) ≤ 0. Если p ≥ 1, то sin(α) ≥ 0.

Выразим g через p и r.
Так как $\cos(\alpha + 2\beta) = \mathrm{r} \cos\alpha$, то
$(1-2g)\sqrt{1-f} - 2\sin\alpha\sin\beta\sqrt{1-g} = r\sqrt{1-f}$,
$r = (1-2g) - 2\frac{p-1}{p+1}(1-g)$,
$g = \frac{3-p-(p+1)r}{4}$.

Определим, какие сочетания значений p и r допустимы. Так как $g = \sin^2\beta$, то g должно быть положительным, следовательно, $r < \frac{4}{p+1} - 1$.

Добавив неравенства 0 < r ≤ p, получим замкнутую область (рис. 2).

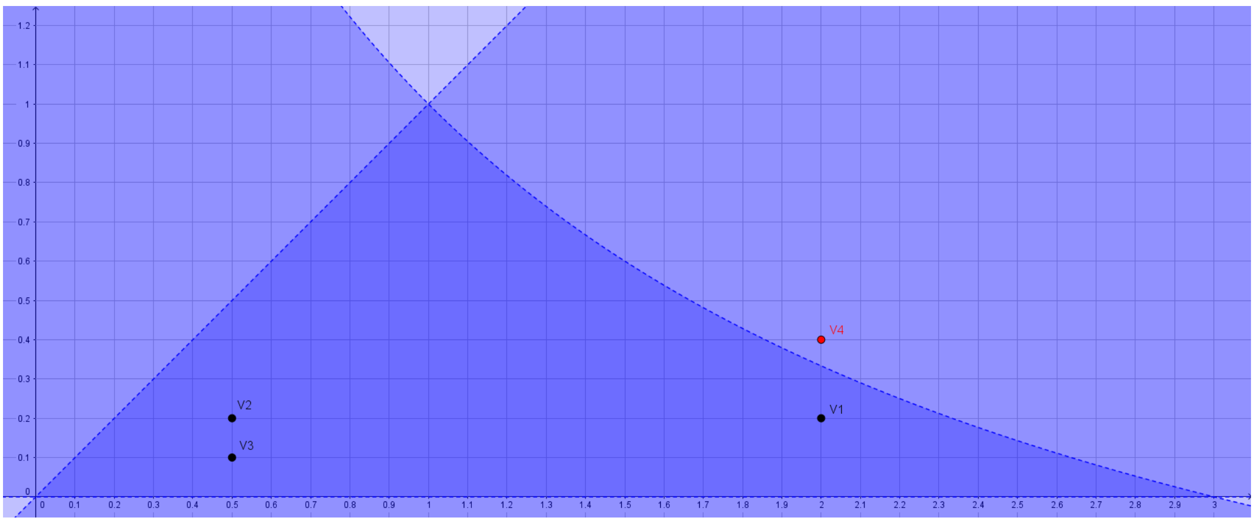


Рис. 2. Область допустимых значений p и r.

В допустимой области неравенства $3\beta < \pi$ и $\alpha + 2\beta < \frac{\pi}{2}$ выполняются автоматически.

Действительно, так как при допустимых p и r: g < 3/4,
то $3\beta < 3\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi$.

А поскольку r > 0, то $\cos(\alpha + 2\beta) = r\cos\alpha > 0$, то есть, $\alpha + 2\beta < \frac{\pi}{2}$.

Теперь определим, какие соотношения площадей из указанных в условии возможны. Учитывая условия задачи и соглашения, принятые на рис. 1, надо рассмотреть 4 варианта.

1. $S_{ADC} = 2$, $S_{DEC} = 4$, $S_{EBC} = 20$, p = 2, r = 1/5 (точка V1 на рис. 2).
2. $S_{ADC} = 4$, $S_{DEC} = 2$, $S_{EBC} = 10$, p = 1/2, r = 1/5 (точка V2).
3. $S_{ADC} = 4$, $S_{DEC} = 2$, $S_{EBC} = 20$, p = 1/2, r = 1/10 (точка V3).
4. $S_{ADC} = 2$, $S_{DEC} = 4$, $S_{EBC} = 10$, p = 2, r = 2/5 (точка V4).

Точка V4 лежит вне допустимой области, а остальные варианты подходят. Вычислим $g = \frac{3-p-(p+1)r}{4}$, $f = \frac{(1-g)(p-1)^2}{4pg+(p-1)^2}$, $\mathrm{tg}^2\,\alpha = \frac{f}{1-f}$, $\mathrm{tg}^2\,\beta = \frac{g}{1-g}$.

	S_{ADC}	S_{DEC}	S_{EBC}	p	r	f	tg(α)	α	g	tg(β)	β	3β
1	2	4	20	2	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	1	45°	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{3}$	18.435°	55.305°
2	4	2	10	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{12}$	$-\frac{\sqrt{11}}{11}$	-16.779°	$\frac{11}{20}$	$\frac{\sqrt{11}}{3}$	47.870°	143.609°
3	4	2	20	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{11}{152}$	$-\sqrt{\frac{11}{141}}$	-15.606°	$\frac{47}{80}$	$\sqrt{\frac{47}{33}}$	50.039°	150.118°

Ответ. Задача имеет три решения.
1. Угол С = 3arctg(1/3) ≈ 55.305°. Пятёрку получил Вася.
2. Угол С = 3arctg(sqrt(11)/3) ≈ 143.609°. Пятёрку получил Петя.
3. Угол С = 3arctg(sqrt(47/33)) ≈ 150.118°. Пятёрку получил Вася.

Условие задачи содержит достаточно данных, чтобы восстановить не только угол С, но и все остальные параметры треугольника АВС.

Угол А = 90 + α – β.
Угол В = 90 – α – 2β.

$h^2 = 2S_{ADC}(1-f)(\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\beta)$,
$|CD| = \frac{h}{\sqrt{1-f}}$, $|CA| = \frac{2S_{ADC}}{|CD|\sin\beta}$, $|CE| = p|CA|$, $|CB| = \frac{|CD|}{r}$.

	A	B	C	h	|CA|	|CD|	|CE|	|CB|
1	116.565°	8.130°	55.305°	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{10}$	4	$2\sqrt{10}$	20
2	25.352°	11.039°	143.609°	$2\sqrt{\frac{\sqrt{11}}{3}}$	$4\sqrt{\frac{5\sqrt{11}}{11}}$	$4\sqrt{\frac{\sqrt{11}}{11}}$	$2\sqrt{\frac{5\sqrt{11}}{11}}$	$20\sqrt{\frac{\sqrt{11}}{11}}$
3	24.355°	5.527	150.118°	$\sqrt{\frac{2\sqrt{1551}}{19}}$	$8\sqrt{5\sqrt{\frac{3}{517}}}$	$4\sqrt{\sqrt{\frac{11}{141}}}$	$4\sqrt{5\sqrt{\frac{3}{517}}}$	$40\sqrt{\sqrt{\frac{11}{141}}}$