РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ 224

Приведу сначала теоремы о биссектрисе треугольника. Если TW – биссектриса треугольника TUV, то   
 == TW2=TU·TV-UW·VW= (TU2-UW2)=(TU2-UW2)= (TV2-VW2)=(TV2-VW2); TU>UW,TV>VW.  
 Теперь о трисектрисах.  
 Пусть треугольник ABC разбивается трисектрисами на треугольники CAD, CDE и CBE, и AD=m·DE, и EB=n·DE, и CD=x, и DE=y. AD=my. EB=ny. CB=nx. CE2=n(x2-y2). x2=CD2=m(CE2-DE2)=m(nx2-ny2-y2). x2(mn-1)=y2m(n+1). (mn>1; это, в частности, означает, что из трех треугольников максимальную площадь имеет или треугольник CAD, или треугольник CEB). cos∟DCB=(CD2+CB2-DB2)/(2·CD·CB)=.  
 По данным m и n построим треугольник ABC следующим образом: из точки С проведем лучи a, d и b так, чтобы угол между лучами a и d был равен arccos, а угол между лучами d и b был равен arccos (луч d – общая сторона этих двух углов), отложим на луче d произвольный отрезок CD, на луче b – отрезок CB=n·CD, и точка A – на пересечении лучей BD и a. Отношение площади треугольника СAD к площади треугольника CDE будет равно m, и отношение площади треугольника СEB к площади треугольника CDE будет равно n, и ∟ACB будет равен 1,5arccos.  
 Треугольник ABC не существует, если ∟DCB≥120°; но это невозможно, так как при любых положительных m и n cos∟DCB= - > - .  
 Треугольник ABC не существует, если лучи a и BD не пересекаются. Если лучи a и BD расходятся, то n будет меньше, чем в случае, когда лучи a и BD параллельны. Если лучи a и BD параллельны, то ∟CBD=180°-∟DCB, ∟CDB=∟DCB, n===, n=-1. Лучи a и BD обязательно пересекутся.  
 Треугольник ABC не существует, если cos∟DCB≥1, то есть если m+n+1≥3mn (в частности, если m и n ≤ 1 (выше я доказал, что mn должно быть больше 1), или если m≤, или если n≤).  
 Во всех остальных случаях (то есть если 3mn-m-n>1) треугольник ABC существует.  
 Если площадь треугольника CDE равна 4, а площади остальных треугольников равны 2 и 20, то ∟ACB=1,5arccos(0,8)≈55°. Если площадь треугольника CDE равна 2, а площади остальных треугольников равны 4 и 10, то ∟ACB=1,5arccos(-0,1)≈144°. Если площадь треугольника CDE равна 2, а площади остальных треугольников равны 4 и 20, то ∟ACB=1,5arccos(-0,175)≈150°.