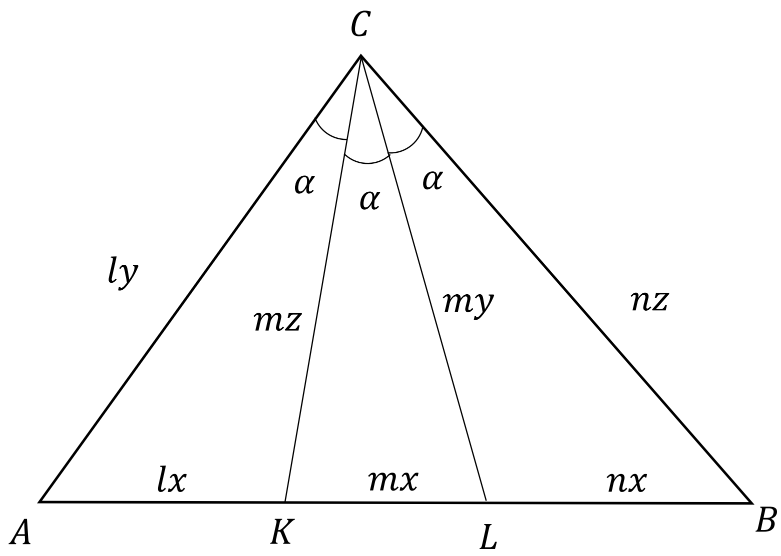
ММ224. В задаче, которую задали на дом Пете и Васе, требовалось найти площади треугольников, на которые разбивается исходный треугольник ABC трисектрисами, проведенными из вершины C. При сверке ответов у Пети и Васи совпали значения двух площадей: 2 и 4. Третья площадь у Пети оказалась равной 10, а у Васи — 20. Найти угол C, если известно, что один из учеников получил за домашнее задание пятерку.

Ответ. $3\arccos\sqrt{\frac{9}{20}} \approx 144°$, $3\arccos\sqrt{\frac{9}{10}} \approx 55°$ или $3\arccos\sqrt{\frac{33}{80}} \approx 150°$.

Решение. Раз один из учеников получил пятёрку, то 2 и 4 — правильные значения площадей, и одно из двух значений третьей площади, 10 или 20, должно быть правильным.



Пусть CK и CL — трисектрисы треугольника ABC. Площади треугольников ACK, CKL и BCL обозначим через l, m и n соответственно. Углы при вершине C этих треугольников одинаковы; обозначим их через α.
У треугольников ACK, CKL и BCL совпадают высоты, проведённые из вершины C, поэтому площади этих треугольников относятся как их стороны AK, KL и LB:

$AK : KL : LB = l : m : n$.

Поэтому обозначим $AK = lx$, $KL = mx$, $LB = nx$.

В треугольнике ACL проведена биссектриса CK, следовательно $CA : CL = AK : KL = l : m$, поэтому обозначим $CA = ly$, $CL = my$. В треугольнике BCK проведена биссектриса CL, следовательно $CK : CB = KL : LB = m : n$, поэтому обозначим $CK = mz$, $CB = nz$.

Запишем теорему косинусов для треугольников ACK, CKL и BCL:

$$l^2x^2 = l^2y^2 + m^2z^2 - 2lmyz\cos\alpha,$$

$$m^2x^2 = m^2y^2 + m^2z^2 - 2m^2yz\cos\alpha,$$

$$n^2x^2 = m^2y^2 + n^2z^2 - 2mnyz\cos\alpha.$$

Поделив первое из этих уравнений на l^2, второе — на m^2, а третье — на n^2, получим

$$x^2 = y^2 + \frac{m^2}{l^2}z^2 - 2\frac{m}{l}yz\cos\alpha,$$

$$x^2 = y^2 + z^2 - 2yz\cos\alpha, \qquad (1)$$

$$x^2 = \frac{m^2}{n^2}y^2 + z^2 - 2\frac{m}{n}yz\cos\alpha.$$

Приравняв отдельно правые части новых уравнений, получим

$$y^2 + \frac{m^2}{l^2}z^2 - 2\frac{m}{l}yz\cos\alpha = y^2 + z^2 - 2yz\cos\alpha,$$

$$y^2 + z^2 - 2yz\cos\alpha = \frac{m^2}{n^2}y^2 + z^2 - 2\frac{m}{n}yz\cos\alpha.$$

Отсюда находим

$$\frac{z}{y} = \frac{2l}{m+l}\cos\alpha, \qquad (2)$$

$$\frac{y}{z} = \frac{2n}{m+n}\cos\alpha\ .$$

Перемножив последние уравнения, получим

$$\cos^2\alpha = \frac{(m+n)(m+l)}{4ln}. \qquad (3)$$

Поскольку $\angle ACB = 3\alpha < 180°$, то α — острый угол, и его косинус положительный, поэтому

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{(m+n)(m+l)}{4ln}}.$$

Рассмотрим все возможные значения l, m, n (с точностью до зеркального отражения) и найдём $\cos\alpha$ в каждом случае:

l	m	n	$\cos\alpha$	α	$\angle C = 3\alpha$
2	4	10	$\sqrt{21/20}$		
2	10	4	$\sqrt{21/4}$		
4	2	10	$\sqrt{9/20}$	$\approx 48°$	$\approx 144°$
2	4	20	$\sqrt{9/10}$	$\approx 18°$	$\approx 55°$
2	20	4	$\sqrt{33/2}$		
4	2	20	$\sqrt{33/80}$	$\approx 50°$	$\approx 150°$

Три случая из шести отпадают, поскольку $\cos\alpha$ получается больше единицы.

В остальных трёх случаях всё хорошо. Как отсеять два случая из трёх, не понятно. Может быть, имелось в виду, что 4 — это площадь среднего треугольника, тогда подходит только случай $l = 2$, $m = 4$, $n = 20$, и угол C треугольника ABC равен $3\alpha = 3\arccos\sqrt{\frac{9}{10}} \approx 55°$. Но поскольку такого уточнения в условии не было, то можно считать, что условие задачи не обеспечивает единственности решения, и все три ответа годятся.