224) Попробуем для начала решить задачу в общем виде. Выберем треугольник, подобный данному и такой, чтобы трисектриссы разбивали его основание на отрезки длиной $a, 1$ и b. Отношение длин этих отрезков равно отношению площадей треугольников из-за общей высоты. Пусть $\angle ACD = \angle DCE = \angle ECB = \alpha$. Тогда, обозначая $CD = x, CE = y$ по свойствам биссектрисы в треугольниках ACE и DCB имеем $AC = ay, BC = bx$. Тогда из формул для биссектрисс следует

$y^2 = ax^2 - a, x^2 = by^2 - b$, поэтому $x^2 = \frac{ab+b}{ab-1}, y^2 = \frac{ab+a}{ab-1}, \cos\alpha = \frac{x^2+y^2-1}{2xy} = \frac{\sqrt{(a+1)(b+1)}}{2\sqrt{ab}}$. Поэтому нужно потребовать, чтобы это выражение было меньше 1 (и $ab > 1$, иначе не подбираются x и y), а вот больше $\frac{1}{2}$ оно получается всегда и само, поэтому $\alpha < 60^o$. и угол 3α может быть в треугольнике. Итак, мы хотим чтобы $(a+1)(b+1) < 4ab$, то есть $a + b + 1 < 3ab$

Докажем, что такую картинку в таком случае можно построить. Построим треугольники ACD, DCE, ECB по трем сторонам. Далее, убедимся, что треугольники состыковываются. Считая косинусы углов $\angle ADC, \angle EDC$, находим

$\frac{a^2+y^2-a^2x^2}{2ay} = -\frac{y^2+1-x^2}{2y}$

$a^2 + y^2 - a^2x^2 = -ay^2 - a + ax^2$

$a^2 + y^2 - a(y^2 + a) = -ay^2 - a + (y^2 + a)$

Что верно. Аналогично стыкуются другие треугольники.

Остался последний вопрос - почему треугольники существуют. Оказывается, теорема косинусов про любой из углов выдает невозможный ответ, если подставить в нее три числа, не являющиеся сторонами треугольника.

В самом деле, пусть $c \geq a + b$. Тогда $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \leq \frac{a^2+b^2-(a+b)^2}{2ab} = -1$ и $\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = 1 + \frac{(a-c)^2-b^2}{2ac} = 1 + \frac{(c-a-b)(c-a+b}{2ac} \geq 1$ (аналогично последний угол)

Перейдем к решению задачи. Пусть, например, правильные площади это $1, 2, 5$. Сделав подходящее преобразование подобия, получим треугольник с отрезками на стороне $2, 1, 5$ или $0.5, 1, 2.5$ или $0.2, 1, 0.4$. Вычислим для каждого из них $\cos\alpha = \frac{\sqrt{(a+1)(b+1)}}{2\sqrt{ab}}$

Для первого случая $\cos\alpha = \frac{\sqrt{18}}{2\sqrt{10}} = \frac{3}{2\sqrt{5}}$

Для второго случая $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5.25}}{2\sqrt{1.25}} > 1$, невозможно

Для третьего случая $\cos\alpha = \frac{\sqrt{1.68}}{2\sqrt{0.08}} > 1$, невозможно

Пусть теперь правильные площади это $1, 2, 10$. Сделав подходящее преобразование подобия, получим треугольник с отрезками на стороне $2, 1, 10$ или $0.5, 1, 5$ или $0.1, 1, 0.2$. Вычислим для каждого из них $\cos\alpha = \frac{\sqrt{(a+1)(b+1)}}{2\sqrt{ab}}$

Для первого случая $\cos\alpha = \frac{\sqrt{33}}{2\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{33}}{4\sqrt{5}}$

Для второго случая $\cos\alpha = \frac{\sqrt{9}}{2\sqrt{2.5}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$

Для третьего случая $\cos\alpha = \frac{\sqrt{1.32}}{2\sqrt{0.02}} > 1$, невозможно

Итак, возможны три случая. Осталось получить ответы в них.

$\cos 3\alpha = \cos\alpha(4\cos\quad\alpha - 3)$

Для $\frac{3}{2\sqrt{5}}$ получаем $\arccos\frac{-9}{5\sqrt{5}}$

Для $\frac{\sqrt{33}}{4\sqrt{5}}$ получаем $\arccos\frac{-27\sqrt{33}}{80\sqrt{5}}$

Для $\frac{3}{\sqrt{10}}$ получаем $\arccos\frac{9}{5\sqrt{10}}$

(самый нормальный ответ - последний, наприме он имеет рациональный тангенс. Думаю, дали такой треугольник. Но формально есть три ответа)

Докажем теперь, что при любых a, b, c - отрезках на стороне - существует либо один ответ, либо два. Пусть $a \geq b \geq c$. Рассмотрим три треугольника со сторонами, пропорциональными этим и одной из сторон 1.

Если это $c/a, 1, c/b$, то $(c/a)(c/b) - 1 \leq 0$ и такой случай невозможен.

Если это $a/c, 1, b/c$, то $(a/c)(b/c) - 1 > 0$ и $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} + 1 < 3\frac{ab}{c^2}$, поскольку каждое слагаемое левой части меньше $\frac{ab}{c^2}$ и такой случай возможен.

А вот случай $a/b, 1, c/b$ иногда возможен, а иногда нет (собственно у нас есть два примера из исходной задачи). Пусть $a/b = x, c/b = y, x > 1 > y > 0$Чтобы он был возможен, необходимо и достаточно, чтобы $xy > 1$ и $x + y + 1 < 3xy$. Нарисовав на плоскости соответствующие области, получим, что при любом $x > 1$ можно брать $y \in (\frac{x+1}{3x-1}, 1)$.