ММ224 (5 баллов)

**Ответ:** Возможны три значения величины угла C:

1. $\frac{3π}{2}-\frac{3}{2}\arccos(\left(\frac{1}{10}\right) )$($143.6^{0})$
2. $\frac{3}{2}\arccos(\left(\frac{4}{5}\right))$ ($55.3^{0}$)
3. $\frac{3π}{2}-\frac{3}{2}\arccos(\left(\frac{7}{40}\right))$ ($150,1^{0}$)

**Решение:** В треугольнике из вершины $C$ провели трисектрисы $CK$ и $CL$ как показано на рисунке. Пусть $∠ACK=∠KCL=∠LCB=α, ∠CKL=γ$. Тогда $∠CAK=γ-α, ∠CLK=π-γ-α, ∠CBA=π-γ-2α.$



Пусть площади треугольников, на которые разбивается треугольник трисектрисами, равны: $S\_{ACK}=S\_{1}, S\_{KCL}=S\_{2}, S\_{LCB}=S\_{3}.$ С одной стороны $\frac{S\_{2}}{S\_{1}}=\frac{\frac{1}{2}CK∙CL∙sin∠KCL}{\frac{1}{2}CA∙CK∙sin∠ACK}=\frac{\frac{1}{2}CK∙CL∙sinα}{\frac{1}{2}CA∙CK∙sinα}=\frac{CL}{CA}$. С другой стороны, по теореме синусов для треугольника $ACL$: $\frac{CL}{CA}=\frac{sin⁡(γ-α)}{sin⁡(γ+α)}$. Так что

 $\frac{S\_{2}}{S\_{1}}=\frac{sin⁡(γ-α)}{sin⁡(γ+α)}$. (1)

Аналогично получаем

 $\frac{S\_{2}}{S\_{3}}=\frac{sin⁡(γ+2α)}{sin⁡γ}.$ (2)

Пусть далее $\frac{S\_{2}}{S\_{1}}\ne 1$. Тогда после преобразований из (1) получаем

$tgγ=\frac{S\_{2}+S\_{1}}{S\_{1}-S\_{2}}tgα,$ (2.1)

а из (2):

$$\frac{S\_{2}}{S\_{3}}=\cos(\left(2α\right))+\frac{\sin(\left(2α\right))}{tg\left(γ\right)}=\cos(\left(2α\right))+\frac{(S\_{1}-S\_{2})\sin(\left(2α\right))}{(S\_{2}+S\_{1})tg\left(α\right)}=$$

$=\cos(\left(2α\right))+\frac{2(S\_{1}-S\_{2})cos^{2}α}{S\_{2}+S\_{1}}=\frac{2S\_{1}}{S\_{2}+S\_{1}}\cos(\left(2α\right))+\frac{S\_{1}-S\_{2}}{S\_{2}+S\_{1}}$*.*

И, наконец,

 $ 2\cos(\left(2α\right))+1=\frac{S\_{2}(S\_{1}+S\_{2}+S\_{3})}{S\_{1}S\_{3}}$ (3)

Далее, поскольку $\cos(\left(2α\right))<1$, получаем необходимое условие для величин площадей:

 $\frac{S\_{2}(S\_{1}+S\_{2}+S\_{3})}{S\_{1}S\_{3}}<3.$ (4)

Замечаем, что если $S\_{2}\geq S\_{1}, S\_{2}\geq S\_{3} $ и для определённости пусть $S\_{3}\geq S\_{1}$, то имеем

$$\frac{S\_{2}(S\_{1}+S\_{2}+S\_{3})}{S\_{1}S\_{3}}=\frac{S\_{2}}{S\_{3}}∙\left(1+\frac{S\_{2}}{S\_{1}}+\frac{S\_{3}}{S\_{1}}\right)\geq 1∙\left(1+1+1\right)=3,$$

что противоречит условию (4). Следовательно, с необходимостью

$S\_{2}<S\_{1}$ или $S\_{2}<S\_{3}$. (5)

Разберём сначала возможные Петины варианты. Вариант $S\_{2}=10$ противоречит условию (5), а в варианте $S\_{2}=4:$ $\frac{S\_{2}(S\_{1}+S\_{2}+S\_{3})}{S\_{1}S\_{3}}=\frac{16}{5}>3$, что противоречит условию (4).

1. Пусть $S\_{2}=2$, и для определённости $S\_{1}=4, S\_{3}=10$. В этом случае последовательно вычисляем

$\cos(\left(2α\right))=-\frac{1}{10}, α=\frac{π}{2}-\frac{1}{2}\arccos(\left(\frac{1}{10}\right))$*,*$∠C=3α=\frac{3π}{2}-\frac{3}{2}\arccos(\left(\frac{1}{10}\right))$

$γ=arctg(3ctg(\frac{1}{2}\arccos(\left(\frac{1}{10}\right)))$*.* В градусах: $∠C≈143.6^{0},∠A=γ-α≈25,35^{0}, ∠B=π-γ-2α≈11,04^{0}$

Таким образом, в треугольнике с найденными углами $3α, γ-α,π-γ-2α$ отношение площадей $\frac{S\_{2}}{S\_{1}}=\frac{1}{2}, \frac{S\_{2}}{S\_{3}}=\frac{1}{5}$, и поэтому при подходящем коэффициенте гомотетии можно добиться, чтобы площади треугольников были равны выбранным значениям: 4,2,10.

Разберём теперь возможные Васины варианты. Вариант $S\_{2}=20$ противоречит условию (5).

1. Пусть $S\_{2}=4$, и для определённости $S\_{1}=2, S\_{3}=20$. В этом случае последовательно вычисляем

$\cos(\left(2α\right))=\frac{4}{5}, α=\frac{1}{2}\arccos(\left(\frac{4}{5}\right))$*,*$∠C=3α=\frac{3}{2}\arccos(\left(\frac{4}{5}\right))$

$γ=\frac{3π}{4}$*.* В градусах: $∠C≈55.3^{0},∠A=γ-α≈116,6^{0}, ∠B=π-γ-2α≈8,1^{0}$

Таким образом, в треугольнике с найденными углами $3α, γ-α,π-γ-2α$ отношение площадей $\frac{S\_{2}}{S\_{1}}=2, \frac{S\_{2}}{S\_{3}}=\frac{1}{5}$, и поэтому при подходящем коэффициенте гомотетии можно добиться, чтобы площади треугольников были равны выбранным значениям: 2,4,20.

1. Пусть $S\_{2}=2$, и для определённости $S\_{1}=4, S\_{3}=20$. В этом случае последовательно вычисляем

$\cos(\left(2α\right))=-\frac{7}{40}, α=\frac{π}{2}-\frac{1}{2}\arccos(\left(\frac{7}{40}\right))$*,*$∠C=3α=\frac{3π}{2}-\frac{3}{2}\arccos(\left(\frac{7}{40}\right))$

$γ=arctg(3ctg(\frac{1}{2}\arccos(\left(\frac{7}{40}\right)))$*.* В градусах: $∠C≈150,1^{0},∠A=γ-α≈24,4^{0}, ∠B=π-γ-2α≈5,5^{0}$

Таким образом, в треугольнике с найденными углами $3α, γ-α,π-γ-2α$ отношение площадей $\frac{S\_{2}}{S\_{1}}=\frac{1}{2}, \frac{S\_{2}}{S\_{3}}=\frac{1}{10}$, и поэтому при подходящем коэффициенте гомотетии можно добиться, чтобы площади треугольников были равны выбранным значениям: 4,2,20.

Далее, при исследовании достаточных условий существования треугольника с данным упорядоченным набором площадей $\left(S\_{1},S\_{2},S\_{3}\right)$ с произвольными положительными числами в наборе, замечаем, что условия (4) и (5) обеспечивают существование единственного значения угла $∠C=3α$ (определяемого из (3)), а также единственного значения угла $γ>α$ (определяемого из (2.1)). Дополнительным и уже достаточным условием служит неравенство

$$γ+2α<π$$

в терминах определённых значений $α$ и $γ$ из условий (4) и (5). В частном случае $\frac{S\_{2}}{S\_{1}}=1$, понятно, $γ=\frac{π}{2}$ и для любого значения $S\_{3}>S\_{2}=S\_{1}$ существует реализация треугольника с таким набором площадей, при этом $S\_{3}/S\_{2}\rightarrow \infty ⟹α\rightarrow \frac{π}{4}$.