ММ223 (5 баллов)

**Ответ:** второй вариант для Васи выгоднее.

**Решение:** 1) В этом случае пространство элементарных событий образуют наборы

 $\left(3,a\_{2},a\_{3},a\_{4},a\_{5}\right), a\_{i}\in \left\{2,3,4,5\right\},i=2,…,5$. (1)

По предположению все события равновероятны. Тогда воспользуемся формулой классической вероятности $P\_{1}=\frac{m}{n}$. Понятно, здесь количество всех элементарных событий равно количеству всевозможных указанных наборов $n=4^{4}=256.$ А при нахождении $m$ будем учитывать, что округленное до целого среднее арифметическое чисел в наборе может увеличиться после замены первого числа с 3 на 5:

$$round\left(\frac{3+a\_{2}+a\_{3}+a\_{4}+a\_{5}}{5}\right)<round\left(\frac{3+a\_{2}+a\_{3}+a\_{4}+a\_{5}}{5}\right)$$

только при условии $\left(3+a\_{2}+a\_{3}+a\_{4}+a\_{5}\right)≡1,2 mod 5$.

При каждом $s=11,…,23$ через $A(s)$ обозначим множество наборов из (1), для которых $3+a\_{2}+a\_{3}+a\_{4}+a\_{5}=s$. Подсчёт интересующих нас значений $\left|A(s)\right|$ отражён в таблице

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| s | Наборы без учёта порядка | Количествонаборов | $$\left|A(s)\right|$$ |
| 11 | 3,(2,2,2,2) | 1 | 1 |
| 12 | 3,(2,2,2,3) | 4 | 4 |
| 16 | 3,(2,2,4,5)3,(2,3,3,5)3,(2,3,4,4)3,(3,3,3,4) | 1212124 | 40 |
| 17 | 3,(2,2,5,5)3,(2,3,4,5)3,(2,4,4,4)3,(3,3,3,5)3,(3,3,4,4) | 624446 | 44 |
| 21 | 3,(3,5,5,5)3,(4,4,5,5) | 46 | 10 |
| 22 | 3,(4,5,5,5) | 4 | 4 |
| Всего  | 103 | 103 |

При подсчёте учитываем очевидные комбинаторные формулы для определения количества наборов с данным набором чисел

$$\left(a,a,a,a\right)-1$$

$$\left(a,a,a,b\right)-C\_{4}^{1}=4$$

$$\left(a,a,b,b\right)-C\_{4}^{2}=6$$

$$\left(a,a,b,c\right)-C\_{4}^{2}2!=12$$

$$\left(a,b,c,d\right)-4!=24$$

Таким образом, количество благоприятных элементарных событий равно $m=103$. А искомая вероятность равна $P\_{1}=\frac{m}{n}=\frac{103}{256}=0,4023…$

2) В этом случае пространство элементарных событий образуют наборы

 $\left\{\left.\left(a\_{1},a\_{2},a\_{3},a\_{4},a\_{5}\right), a\_{i}\in \left\{2,3,4,5\right\},i=1,…,5\right|∃i: a\_{i}=3\right\}$. (2)

Здесь также, по предположению, все события равновероятны. И также воспользуемся формулой классической вероятности $P\_{2}=\frac{m}{n}$. В этом случае количество всех элементарных событий равно количеству всевозможных указанных наборов $n=4^{5}-3^{5}=781$ (от количества всевозможных наборов с условием $a\_{i}\in \left\{2,3,4,5\right\},i=1,…,5$ отнимаем количество всевозможных наборов с условием $a\_{i}\in \left\{2,4,5\right\},i=1,…,5)$. Также как и в первом случае, при нахождении $m$ будем учитывать, что округленное до целого среднее арифметическое чисел в наборе может увеличиться после замены первого числа с 3 на 5:

$$round\left(\frac{a\_{1}+a\_{2}+a\_{3}+a\_{4}+a\_{5}}{5}\right)<round\left(\frac{a\_{1}+a\_{2}+a\_{3}+a\_{4}+a\_{5}}{5}\right)$$

только при условии $\left(a\_{1}+a\_{2}+a\_{3}+a\_{4}+a\_{5}\right)≡1,2 mod 5$.

При каждом $s=11,…,23$ через $B(s)$ обозначим множество наборов из (2), для которых $a\_{1}+a\_{2}+a\_{3}+a\_{4}+a\_{5}=s$. Подсчёт интересующих нас значений $\left|B(s)\right|$ отражён в таблице

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| s | Наборы без учёта порядка | Количествонаборов | $$\left|B(s)\right|$$ |
| 11 | (2,2,2,2,3) | 5 | 5 |
| 12 | (2,2,2,3,3) | 10 | 10 |
| 16 | (2,2,3,4,5)(2,3,3,3,5)(2,3,3,4,4)(3,3,3,3,4) | 6020305 | 115 |
| 17 | (2,2,3,5,5)(2,3,3,4,5)(2,3,4,4,4)(3,3,3,3,5)(3,3,3,4,4) | 306020510 | 125 |
| 21 | (3,3,5,5,5)(3,4,4,5,5) | 1030 | 40 |
| 22 | (3,4,5,5,5) | 20 | 20 |
| Всего  | 315 | 315 |

Здесь мы учитывали количество наборов с заданным набором чисел

$$\left(a,a,a,a,a\right)-1$$

$$\left(a,a,a,a,b\right)- C\_{5}^{1}=5$$

$$\left(a,a,a,b,b\right)-C\_{5}^{2}=10$$

$$\left(a,a,a,b,c\right)- C\_{5}^{3}2!=20$$

$$\left(a,a,b,b,c\right)- C\_{5}^{2}C\_{3}^{2}=30$$

$$\left(a,a,b,c,d\right)-C\_{5}^{2}3!=60$$

$$\left(a,b,c,d,e\right)-5!=120$$

Таким образом, количество благоприятных элементарных событий равно $m=315$. А искомая вероятность равна $P\_{2}=\frac{m}{n}=\frac{315}{781}=0,4033…$

 Сравнивая величины $P\_{1}$ и $P\_{2}$, видим, что $P\_{1}<P\_{2}$. Понятно, что, хоть и не значительно, но второй вариант для Васи выгоднее.

Чтобы понять, за счёт чего вторая вероятность оказалась выше проанализируем таблицу со всеми значениями $\left|A(s)\right|$ и $\left|B(s)\right|$

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| s | $$\left|A(s)\right|$$ | $$\left|B(s)\right|$$ |
| 11 | 1 | 5 |
| 12 | 4 | 10 |
| 13 | 10 | 30 |
| 14 | 20 | 55 |
| 15 | 31 | 81 |
| 16 | 40 | 115 |
| 17 | 44 | 125 |
| 18 | 40 | 120 |
| 19 | 31 | 105 |
| 20 | 20 | 70 |
| 21 | 10 | 40 |
| 22 | 4 | 20 |
| 23 | 1 | 5 |
| Всего | 103 | 315 |

И если $A\_{r}=\sum\_{s≡r mod5}^{} \left|A(s)\right| , B\_{r}=\sum\_{s≡r mod5}^{} \left|A(s)\right|$, то из таблицы

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$r$$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 0 |
| $$A\_{r}$$ | 51 | 52 | 51 | 51 | 51 |
| $$A\_{r}/256$$ | 0,1992... | 0,2031... | 0,1992... | 0,1992... | 0,1992... |
| $$B\_{r}$$ | 160 | 155 | 155 | 160 | 151 |
| $$A\_{r}/781$$ | 0,2048... | 0,1984... | 0,1984... | 0,2048... | 0,1933... |

видим, что второе условие выгоднее первого за счёт преобладания вероятности в первом столбце, то есть за счёт более вероятной суммы оценок с остатком 1 при делении на 5, причём большем, чем преобладание вероятности во втором столбце для первого условия.

Интересное наблюдение: если каким-то образом Вася исправлял тройку на четвёрку вместо пятёрки, то выгоднее для Васи именно первое условие (второй столбец).

А если недоброжелатель исправлял тройку на двойку, то в этом случае второе условие более выгодно для Васи, поскольку при этом его средняя оценка уменьшится с меньшей вероятностью (третий столбец).

В заключение приведём значения вероятностей $P\_{1}$ и $P\_{2}$ для случая $N$ оценок в четверти при близких значениях $N$ (при чётных значениях за счёт округления в большую сторону полуцелых есть некое искажение общей картины)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| $$N$$ | $$P\_{1}$$ | $$P\_{2}$$ |
| 4 | $$0,3906$$ | 0,3885 |
| 5 | $$0,4023$$ | $$0,4033$$ |
| 6 | $$0,4003$$ | 0,3997 |
| 7 | $$0,3999$$ | 0,4003 |
| 8 | $$0,4000$$ | $$0,4001$$ |