

=====MM223=====

MM223 (6 баллов)

Решения принимаются до 22.09.2017

Рассмотрим две задачи.

1. Вася получил за четверть 5 оценок по географии. Ему удалось незаметно исправить в журнале первую из них с тройки на пятерку. Выставляя итоговую оценку, учительница находит среднюю оценку и округляет ее до целой. Какова вероятность, что Васина оценка за четверть повысится при условии, что учительница не выявит подлога, а все допустимые упорядоченные наборы оценок равновероятны?

2. Вася получил за четверть 5 оценок по географии. Ему удалось незаметно исправить в журнале первую попавшуюся из них с тройки на пятерку. Выставляя итоговую оценку, учительница находит среднюю оценку и округляет ее до целой. Какова вероятность, что Васина оценка за четверть повысится при условии, что учительница не выявит подлога, а все допустимые упорядоченные наборы оценок равновероятны?

Какое из условий выгоднее для жуликоватого Васи?

Примечание: Был ли журнал электронным - не важно. Но важно, что колы не ставим: разрешается использовать только оценки 2, 3, 4, 5

=====

Исходная сумма оценок S могла быть от 11 до 23 включительно. После исправления одной тройки на пятерку округлённое среднее увеличится, если $S \in \{1, 2\} \pmod{5}$, то есть, если $S \in \{11, 12, 16, 17, 21, 22\}$.

В первой задаче имеется 103 подходящих набора оценок из 256, так что вероятность увеличения оценки за четверть равна $103/256 = 0.4023\dots$

Во второй задаче имеется 315 подходящих наборов оценок из 781, так что вероятность увеличения оценки за четверть равна $315/781 = 0.4033\dots$

Ответ. Условия второй задачи для Васи выгоднее.

Обобщение.

Пусть оценки могут принимать значения от 2 до M , $M \geq 5$, а за четверть Вася получил нечётное число N оценок. Как и прежде, Вася исправил первую или первую попавшуюся из них с тройки на пятерку.

| M \ N | 3 | 5 | 7 | 9 |
|-------|------------------|------------------------|------------------------|----------------------------|
| 5 | 0.69 0.76 | 0.4023 0.4033 | 0.300 0.292 | 0.251 0.241 |
| 6 | 0.640 0.656 | 0.40000 0.39981 | 0.2847 0.2854 | 0.2172 0.2193 |
| 7 | 0.667 0.670 | 0.4004 0.3988 | 0.28573 0.28567 | 0.22262 0.22242 |
| 8 | 0.673 0.693 | 0.39941 0.40028 | 0.2857143 0.2857138 | 0.222214 0.222222 |
| 9 | 0.656 0.663 | 0.39966 0.39972 | 0.285713 0.285725 | 0.222222210 0.222222290 |
| 10 | 0.6667 0.6682 | 0.4000914 0.4000989 | 0.285719 0.285722 | 0.222222222 0.222222213 |

Так как Вася увеличил сумму оценок на 2, то увеличение оценки за четверть происходит в двух случаях из N возможных значений $S \pmod N$. Вероятность этого в обеих задачах примерно $2/N$. Жёлтым цветом отмечены варианты, когда для Васи оказались выгоднее условия второй задачи.