

ММ177.

В розыгрыше кубка мира участвуют 128 равных по силе шахматистов. 10 из них представляют Россию, 8 - Украину. После жеребьевки в первом раунде встречаются №1 и №2, №3 и №4, ..., №127 и №128. Во втором раунде победитель первой пары встречается с победителем второй, победитель третьей - с победителем четвертой и т. д. Российским шахматистам по жребию достались номера 1, 9, 17, 25, 33, 41, 49, 57, 65 и 73; украинским - 2, 18, 34, 50, 66, 82, 98, 114. За первое место выплачиваются призовые - 200000 долларов, за второе - 10000 долларов.. За остальные места призовые не выплачиваются.

Какой финал более вероятен: чисто российский или чисто украинский?

Каковы российское и украинское призовые мат. ожидания?

Решение.

Все 128 шахматистов равны по силам, каждому из них, чтобы выиграть кубок, необходимо выиграть одно и то же количество партий (вероятность выигрыша в любой партии $\frac{1}{2}$), тогда, вероятность выигрыша кубка для любого из участников равна $\frac{1}{128}$.

Тогда, вероятность того, что кубок выиграет российский шахматист $\frac{10}{128} = \frac{5}{64} = 0,078125$, а украинский - $\frac{8}{128} = \frac{1}{16} = 0,0625$.

В задаче речь идёт о финалистах, но можно рассматривать каждого финалиста как победителя турнира по олимпийской системе из 64 участников. В верхней половине сетки (номера от 1 до 64) 8 российских шахматистов, а в нижней - 2. Тогда вероятность того, что шахматист из России выйдет в финал для верхней части сетки равна $\frac{8}{64}$, а для нижней - $\frac{2}{64}$, получаем вероятность чисто российского финала $\frac{8}{64} \cdot \frac{2}{64} = \frac{16}{4096} = \frac{1}{256}$. Украинских шахматистов по 4 и в верхней и в нижней частях сетки, тогда вероятность чисто украинского финала $\frac{4}{64} \cdot \frac{4}{64} = \frac{16}{4096} = \frac{1}{256}$.

Таким образом, одинаково вероятны чисто российский и чисто украинский финалы.

Найдём призовые мат. ожидания.

Случайная величина X - призовые российских игроков. Возможные значения X :

- 200000 + 10000 = 210000 в случае чисто российского финала, соответствующая вероятность равна $\frac{1}{256}$;

- если в финал выйдет только один шахматист из России, то X может с равной вероятностью принять значения 200000 и 10000, вероятности равны $\left(\frac{8}{64} \cdot \frac{62}{64} + \frac{2}{64} \cdot \frac{56}{64}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{19}{256}$;

- и 0, если в финале нет ни одного россиянина, $\frac{56}{64} \cdot \frac{62}{64} = \frac{217}{256}$.

$$M(X) = 210000 \cdot \frac{1}{256} + 200000 \cdot \frac{19}{256} + 10000 \cdot \frac{19}{256} = 16406.25$$

Можно вывести и общую формулу, например, если всего в турнире по олимпийской системе 2^m участников, призы за первое и второе место равны R_1 и R_2 соответственно, а участников от какой-либо страны k_1 и k_2 в верхней и нижней частях сетки, то:

1. Вероятность выхода в финал 2 шахматистов от этой страны $\frac{k_1 k_2}{2^{2m-2}}$;

2. Вероятность выхода в финал только одного шахматиста от этой страны $\frac{k_1(2^{m-1}-k_2) + k_2(2^{m-1}-k_1)}{2^{2m-2}}$;

3. Вероятность получения призовых в размере R_1 (или R_2) равна $\frac{k_1(2^{m-1}-k_2) + k_2(2^{m-1}-k_1)}{2^{2m-1}}$;

Тогда мат. ожидание призовых будет равно

$$M = (R_1 + R_2) \frac{k_1 k_2}{2^{2m-2}} + R_1 \frac{k_1(2^{m-1}-k_2) + k_2(2^{m-1}-k_1)}{2^{2m-1}} + R_2 \frac{k_1(2^{m-1}-k_2) + k_2(2^{m-1}-k_1)}{2^{2m-1}} = \frac{(R_1 + R_2)(k_1 + k_2)}{2^m}$$

Подставив данные для России получаем

$$M(X) = \frac{(200000 + 10000)(8 + 2)}{2^7} = 16406.25$$

Результаты совпали.

Мат. ожидание призовых для Украины

$$M(Y) = \frac{(200000 + 10000)(4 + 4)}{2^7} = 13125$$

Можно заполнить соответствующую табличку, в которой приведены законы распределения размеров призовых и для России и для Украина и для системы этих 2-х случайных величин.

	Украина	210000	200000	10000	0
Россия		1/256	15/256	15/256	225/256
210000	1/256	-	-	-	0,003906
200000	19/256	-	-	0,004883	0,069336
10000	19/256	-	0,004883	-	0,069336
0	217/256	0,003906	0,053711	0,053711	0,736328