218. (Будем пока считать, что если у n-гранника есть $n-1$-угольная грань, то это пирамида. Вообще-то это неверно, но я понял это уже после того, как написал решение. Поэтому случай $n-1$-угольных граней будет разобран в конце. В частности, ответ сейчас неверен, но представляет собой наилучший ответ для прочих многогранников, поэтому я его оставлю).
Ответ 1005.
Пример. Рассмотрим правильную 1007-угольную пирамиду, на одной из треугольных граней которой построена очень плоская треугольная пирамида (так, чтобы выпуклость сохранялась). Очевидно, все диагонали этого многогранника соединяют вершину этой треугольной пирамиды с вершинами основания. Таких диагоналей 1005.
Докажем теперь, что меньше чем 1005 не бывает. Пусть всего у многогранника n граней и количество ребер у них $H_1, \dots H_n$. Тогда
$\sum H_i = 4034$, $V = 2019-n$. Число диагоналей, как мы уже знаем, равно $\frac{1}{2}(V^2-V-\sum H_i^2+2\sum H_i) = \frac{1}{2}((2019-n)^2+n-\sum H_i^2+6049)$. Чтобы сделать эту величину поменьше при фиксированном n (и раз навсегда фиксированной $\sum H_i = 4034$) следует брать максимально далекие H_i.
Заметим также, что число граней многогранника не превосходит $\frac{4034}{3}$, то есть не превосходит 1344. Аналогично и число вершин не превосходит 1344, откуда число граней не меньше 675.
Случай 1. $n = 1010$. Тогда набор с максимальной суммой квадратов это $3, 3, 3, \dots 3, 1007$. Для него получается наш ответ.
Случай 2. $n > 1010$. Тогда набор с максимальной суммой квадратов это $3, 3, 3, \dots 3, 4037-3n$. Для него получается ответ
$f(n) = \frac{1}{2}((2019-n)^2+n-(n-1)9-(4037-3n)^2+6049) = -4n^2+10088n+C$. Это парабола с вершиной при $n = 1261$, поэтому полученная функция возрастает на $[1010, 1261]$ и убывает дальше, при этом $f(1512) = f(1010)$. Поэтому неравенство $f(n) > 1005$ выполнено при всех $n \in [1011, 1344]$
Случай 3. $808 < n < 1010$. Заметим тогда, что все грани - не более чем $(n-2)$ - угольники (единственный n- гранник с гранью-$(n-1)$-угольником - пирамида. Но у пирамиды число ребер четно). Следовательно, набор с максимальной суммой квадратов это $3, 3, 3, \dots 3, 4042-4n, n-2$ (очевидно $4042-4n < n-2$, так как $5n > 4044$). Для него имеем
$f(n) = \frac{1}{2}((2019-n)^2+n-(n-2)^2-(n-2)9-(4042-4n)^2+6049) = -8n^2+14147n+C$. Это парабола с вершиной при $n = 884.1875$ и $f(1009) = 2030.5 > 1005$. Следовательно, при всех n от 885 до 1009 будем иметь $f(n) > 1005$. Более того, из симметрии параболы будем иметь то же неравенство на участке от 759.375 до 884, то есть на всем интересующем нас промежутке.
Случай 4. $674 < n < 809$. Тогда набор с максимальной суммой квадратов это $3, 3, 3, \dots 3, 4047-5n, n-2, n-2$ (очевидно $4047-5n < n-2$, так как $6n > 4049$). Тогда $f(n) = \frac{1}{2}((2019-n)^2+n-2(n-2)^2-(n-3)9-(4047-5n)^2+6049) = -13n^2+18216n+C$. Это парабола с вершиной при $n \approx 700$ и как и в предыдущих случаях имеем нужное нам неравенство.

Попробуем теперь исследовать эту задачу для произвольного заданного числа ребер. Сразу заметим, что при четном $R \geq 6$ ответом будет $\frac{R}{2}$ - угольная пирамида (у нее 0 диагоналей), при $R = 9$ - треугольная призма (у нее 0 диагоналей), а при $R = 1, 2, 3, 4, 5, 7$ многогранника с таким числом ребер не существует.
Гипотеза заключается в том, что при всех нечетных R кроме $R = 9$ ответом будет $\frac{R-7}{2}$ и конструкция полностью аналогична разобранному частному случаю.
Итак, пусть ребер R, граней n. Тогда вершин $2+R-n$, причем $n \leq \frac{2R}{3}, n = R-V+2 \geq \frac{R}{3}+2$.
Нас интересует минимум выражения $2D = V^2-V+4R-\sum H_i^2 = (2+R-n)^2-2+3R+n-\sum H_i^2$, причем $\sum H_i = 2R$, а количество слагаемых в последней сумме равно n.
Вспомним также, что при фиксированной сумме чисел сумма их квадратов максимальна, если числа раздвинуты как можно дальше друг от друга.
Это означает, что если неравенство будет выполнено для какого-то набора с раздвинутыми числами, то оно было выполнено и до раздвижения (раздвигать всегда будем по 2 числа - к одному $+1$, к другому -1).
Будем также считать пока, что R - достаточно большое число (какое именно - будет постепенно уточняться в процессе доказательства и получится что $R \geq 23$).
Случай 1. $n \geq \frac{R+3}{2}$.
Тогда максимально раздвинутый набор выглядит так - $3, 3, 3, \dots, 3, 2R-3n+3$ и любой набор чисел можно раздвинуть в него.
Для него имеем $2D = (2+R-n)^2-2+3R+n-9(n-1)-(2R-3n+3)^2 = -8n^2+(10R+6)n-3R^2-5R+2$.
Это парабола ветвями вниз и с вершиной в $n = \frac{5R+3}{8}$.
Кроме того, при $n = \frac{R+3}{2}$ имеем $2D = -2(R+3)^2+(5R+3)(R+3)-3R^2-5R+2 = R-7$ - та самая точная оценка.

Поскольку $\frac{5R+3}{8} > \frac{R+3}{2}$ при $R > 9$, то при увеличении n эта функция растет до $\frac{5R+3}{8}$ и потом убывает, принимая значение $R-7$ вторично в точке $\frac{5R+3}{4} - \frac{R+3}{2} = \frac{3R-3}{4} > \frac{2R}{3}$ при $R > 9$. Поэтому при все допустимых n значения функции не меньше, чем $R-7$.
В остальных случаях $n \leq \frac{R-1}{2}$. Заметим, что если у тела всего n граней, то каждая из них - не более чем $n-2$-угольник. В самом деле, каждое ребро грани должно входить в какую-то еще грань и все эти грани различны. Если их $n-1$, то это может быть только $n-1$ - угольная пирамида, но у нее четное число ребер.
Случай 2. $\frac{2R}{5}+2 \leq n \leq \frac{R+1}{2}$. Тогда максимально раздвинутый набор выглядит так - $3, 3, 3, \ldots, 3, 2R-4n+8, n-2$ и любой набор чисел можно раздвинуть в него (сначала раздвигая максимальный с неминимальным, потом максимальный из оставшихся с неминимальным. В итоге все кроме двух сдвинутся в тройки, один в $n-2$ и последний из соображений суммы - в $2R-4n+8$). Заметим также, что $2R-4n+8 \leq n-2$, так как $2R+10 \leq 5n$.
Для него имеем $2D = (2+R-n)^2 - 2 + 3R + n - 9(n-2) - (2R-4n+8)^2 - (n-2)^2 = -16n^2 + n(14R+56) - 3R^2 - 25R - 44$. Это парабола ветвями вниз и с вершиной в $n = \frac{7R+28}{16}$.
Поскольку $\frac{7R+28}{16} < \frac{R+2}{2}$ при $R > 12$ и при $n = \frac{R+2}{2}$ имеем $2D = -4(R+2)^2 + (R+2)(7R+28) - 3R^2 - 25R - 44 = R-4 > R-7$, то на всем промежутке от $\frac{7R+28}{8} - \frac{R+2}{2} = \frac{3R+20}{8}$ до $\frac{R+2}{2}$ выполнено неравенство $2D > R-7$. Поскольку $\frac{3R+20}{8} < \frac{2R}{5} + 2$ при $R > 20$, то весь нужный нам промежуток накрыт.
Случай 3. $\frac{R}{3} + 3 \leq n \leq \frac{2R}{5} + 2$
Тогда максимально раздвинутый набор выглядит так - $3, 3, 3, \ldots, 3, 2R-5n+13, n-2, n-2$ и любой набор чисел можно раздвинуть в него (сначала раздвигая максимальный с неминимальным, потом максимальный из оставшихся с неминимальным и еще раз так же. В итоге все кроме трех сдвинутся в тройки, два в $n-2$ и последний из соображений суммы - в $2R-5n+13$). Заметим также, что $2R-5n+13 \leq n-2$, так как $2R+15 \leq 5n$ и $2R-5n+13 \geq 3$.
Для него имеем $2D = (2+R-n)^2 - 2 + 3R + n - 9(n-3) - (2R-5n+13)^2 - 2(n-2)^2 = -26n^2 + (18R+126)n - 3R^2 - 45R - 148$. Это парабола ветвями вниз и с вершиной в $n = \frac{9R+63}{26} < \frac{2R+10}{5}$ при $R \geq 8$.
Поскольку при $n = \frac{2R}{5} + 2$ получаем $2D = \frac{R^2-5R}{25} > R-7$ при $R \geq 23$, то и на всем промежутке от $\frac{9R+63}{13} - \frac{2R+10}{5} = \frac{19R+185}{65}$ до $\frac{2R+10}{5}$ неравенство выполнено. Этот промежуток полностью накрывает наш, поскольку $\frac{19R+185}{65} < \frac{R}{3} + 3$ при всех R.
Случай 4. $\frac{R}{3} + 2 \leq n \leq \frac{R}{3} + 3$. Мы счастливо избежали его в прошлый раз при $R = 2017$, где он удобно подклеился к предыдущему. На самом деле неравенства здесь могут быть сделаны строгими и тогда тут иногда не будет неразобранных чисел вовсе. Но нам не трудно.
В реальности в этом промежутке всего одно-два натуральных числа, поэтому он не обещает быть трудным. Максимально раздвинутый набор выглядит так - $3, 3, 3, \ldots, 3, 2R-6n+20, n-2, n-2, n-2$, причем четвертое по величине число не больше 8.
Поэтому $2D = (2+R-n)^2 - 2 + 3R + n - 9(n-4) - (2R-6n+20)^2 - 3(n-2)^2 \geq (R-1)^2 - 2 + 3R + \frac{R}{3} + 2 - 9(\frac{R}{3} - 1) - 64 - 3(\frac{R}{3} + 1)^2 \geq \frac{2}{3}R^2 - 4R + \frac{R}{3} - 57 > R-7$ при $R \geq 13$.
Случай 5. R - маленькое нечетное число $(11, 13, 15, 17, 19, 21)$.
В принципе, для многих из них предыдущие рассуждения проходят (например, если в каком-либо отрезочке, где оценка не проходит, нет целых чисел). Однако проще будет заметить, что первый случай работает всегда, а остальные разобрать заново. Напомним, что $\frac{R}{3} + 2 \leq n \leq \frac{R+1}{2}$ и все грани не более чем $n-2$-гранники.
5.1) $R = 11$, $\sum H_i = 22$, $6 \leq n \leq 6$, $\frac{R-7}{2} = 2$
$n = 6$, $v = 7$, $n-2 = 4$. Единственный вариант $3, 3, 4, 4, 4, 4$ имеет (если существует) $21 - 11 - 4 \cdot 2 = 3 > 2$ диагоналей.
5.2) $R = 13$, $\sum H_i = 26$, $7 \leq n \leq 7$, $\frac{R-7}{2} = 3$
$n = 7$, $v = 8$, $n-2 = 5$. Оптимальный вариант $3, 3, 3, 3, 4, 5, 5$ имеет (если существует) $28 - 13 - 2 - 2 \cdot 5 = 3$ диагонали.
5.3) $R = 15$, $\sum H_i = 30$, $7 \leq n \leq 8$, $\frac{R-7}{2} = 4$
$n = 7$, $v = 10$, $n-2 = 5$. Оптимальный вариант $3, 3, 4, 5, 5, 5, 5$ имеет (если существует) $45 - 15 - 2 - 4 \cdot 5 = 8 > 4$ диагоналей.
$n = 8$, $v = 9$, $n-2 = 6$. Оптимальный вариант $3, 3, 3, 3, 3, 3, 6, 6$ не существует $(6 + 6 - 2 > 9)$, Оптимальный из остальных вариант $3, 3, 3, 3, 3, 4, 5, 6$ имеет (если существует) $36 - 15 - 2 - 5 - 9 = 5 > 4$ диагоналей.
5.4) $R = 17$, $\sum H_i = 34$, $8 \leq n \leq 9$, $\frac{R-7}{2} = 5$
$n = 8$, $v = 11$, $n-2 = 6$. Оптимальный вариант $3, 3, 3, 3, 4, 6, 6, 6$ имеет (если существует) $55 - 17 - 2 - 3 \cdot 9 = 9 > 5$ диагоналей.

$n=9$, $v=10$, $n-2=7$. Оптимальный вариант $3,3,3,3,3,3,3,6,7$ имеет (если существует) $45-17-9-14=5$ диагоналей. На самом деле не существует в силу леммы, но это неважно. Зато это позволяет не задумываться, какой из существующих имеет минимальное число диагоналей.
5.5) $R=19$, $\sum H_i=38$, $9\le n\le 10$, $\frac{R-7}{2}=6$
$n=9$, $v=12$, $n-2=7$. Оптимальный вариант $3,3,3,3,3,3,6,7,7$ имеет (если существует) $66-19-9-2\cdot 14=10>6$ диагоналей.
$n=10$, $v=11$, $n-2=8$. Оптимальный вариант $3,3,3,3,3,3,3,3,6,8$ имеет (если существует) $55-19-9-20=7>6$ диагоналей. На самом деле не существует в силу леммы, но это неважно.
5.6) $R=21$, $\sum H_i=42$, $9\le n\le 11$, $\frac{R-7}{2}=7$
$n=9$, $v=14$, $n-2=7$. Оптимальный вариант $3,3,3,3,3,6,7,7,7$ имеет (если существует) $91-21-9-3\cdot 14=19>7$ диагоналей. Кажется тоже не существует, поскольку грани по 7 вершин вроде так не стыкуются, но это неважно.
$n=10$, $v=13$, $n-2=8$. Оптимальный вариант $3,3,3,3,3,3,3,5,8,8$ имеет (если существует) $78-21-5-2\cdot 20=12>7$ диагоналей. На самом деле не существует в силу леммы, но это неважно.
$n=11$, $v=12$, $n-2=9$. Оптимальный вариант $3,3,3,3,3,3,3,3,3,6,9$ имеет (если существует) $66-21-9-27=9>7$ диагоналей. На самом деле не существует в силу леммы, но это неважно.
Теорема доказана.

Займемся теперь случаем, когда одна из граней n-гранника - $n-1$-угольник. Ответ тогда будет $\frac{R-9}{2}$. Пример будет построен ниже. Возможно нам и удалось бы подключить этот случай к предыдущим, но пришлось бы пересчитывать все трехчлены. Лучше я сделаю отдельно.
Тогда все остальные грани многогранника имеют по одному общему ребру с этой гранью (будем называть ее основанием). Пусть кроме вершин основания есть еще v вершин. Тогда всего $n-1+v$ вершин, n граней и $2n+v-3$ ребер, из которых $n-1$ использованы в основании, а остальные $n+v-2$ соединяют прочие вершины между собой или прочие вершины с вершинами основания. Будем рассматривать многогранник иногда как многогранник, а иногда как граф - в зависимости от того, что будет удобнее в данный момент. Тогда будем считать, что все вершины, кроме вершин основания, нарисованы внутри грани-основания.
Заметим, что все вершины, кроме вершин основания, образуют дерево - очевидно в нем нет циклов(иначе были бы грани, не примыкающие к основанию). Если же он несвязен - отделим замкнутой линией его компоненты друг от друга и доведем ее до контура основания. Тем самым мы получим в графе область, выходящую на контур многоугольника в двух местах (поскольку от каждой компоненты есть путь до одной из частей основания, это не может оказаться одна и та же часть). Вся эта линия идет внутри одной области. Но тогда у многогранника есть грань, содержащая две несоседние вершины основания и значит пересекающаяся с ним не по ребру.
Тогда в нем $v-1$ ребро и еще $n-1$ соединяют вершины дерева с вершинами основания.
Оценим теперь количество диагоналей. Будем считать отрезки от вершин дерева до вершин основания. Если они не ребра и не диагонали граней, то они нам подходят.
Рассмотрим любую вершину дерева. Из нее исходят несколько ребер в другие вершины дерева и несколько ребер к основанию пирамиды. Они разбивают ее окрестность на несколько областей. Области бывают трех типов - оба ребра в дереве, оба ребра к основанию, одно в дереве, другое к основанию.
Если оба ребра в дереве, то они входят в какую-то грань, которая выходит на контур основания в двух соседних вершинах. Их брать нельзя.
Если оба ребра к основанию, то они входят в треугольную грань и нельзя брать их концы.
Если по ребру каждого типа, то нельзя брать конец ребра к основанию и одну из соседних с ним вершин.
Таким образом, каждое ребро к основанию запрещает одну вершину, а каждое ребро в дереве - не более двух (по одной с каждой стороны). Поэтому всего разрешенных вершин будет не менее $(n-1)-2deg_1-deg_2$, где deg_1 - степень вершины в дереве, deg_2 - количество ребер,ведущих из нее к основанию. Поэтому всего диагоналей будет разрешено не менее чем
$v(n-1)-2\sum deg_1-\sum deg2=v(n-1)-4(v-1)-(n-1)=vn-5v-n+5$.
Мы хотим доказать, что $vn-5v-n+5\ge\frac{2n+v-3-9}{2}$, то есть $(v-2)(n-5.5)\ge 0$, что верно при достаточно больших n,v. Заметим также, что степень каждой вершины дерева (в исходном графе) не меньше трех, откуда $(n-1)+2(v-1)\ge 3v$, $n\ge v+3$.
Остались следующие варианты.
1) $v=1$. Тогда это все-таки пирамида. У нее 0 диагоналей, но она возможна лишь при четном числе ребер.
2) $n=4$ или $n=5$. Тогда $v\le 2$ и первая скобка тоже неположительна, поэтому неравенство верно.

3) $v = 2$. Тогда получаем равенство. Осталось построить пример.
Рассмотрим правильную треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$. В грани ABB_1A_1 соединим точки A_1 и B_1 ломаной линией, замыкаемой ребром (его надо стереть) A_1B_1 в выпуклый многоугольник. Затем соединим все вершины этой ломаной с C_1. Если на ломаной будет x новых вершин, то всего вершин будет $x+6$, ребер $2x+9$, граней $x+5$ (одна из них $x+4$- угольник, два четырехугольника, остальные треугольники) и диагоналей x (соединяют точку C с вершинами ломаной), то есть как раз $\frac{R-9}{2}$.
Возможны и другие примеры. Все они устроены так - $n-1$ - угольник, внутри которого лежит ребро. Оно соединено с двумя ребрами основания и образует два четырехугольника, а еще каждая вершина основания соединена с одним из концов этого ребра. Иными словами, можно было пристраивать ломаные к обоим основаниям призмы.

$\sum H$