MM211

Доказать, что при любом чётном $f > 4$ существует многогранник, имеющий f граней, все грани которого четырёхугольники.

Доказательство

Рассмотрим многогранник, двойственный $\frac{f}{2}$-угольной антипризме. Так как из каждой вершины антипризмы исходит 4 ребра, а количество вершин – f, следовательно такой многогранник будет состоять из f четырёхугольных граней. □

Разумеется, это не единственный способ получения искомых многогранников. Возьмём, к примеру, куб и добавим к одной из его граней такую конструкцию (см. рисунок 1, выделена зелёным цветом). Из шестигранника получен десятигранник. Понятно, что таким способом из куба можно получить многогранник, который имеет f граней, для любого $f > 4, f \equiv 2(mod\ 4)$.

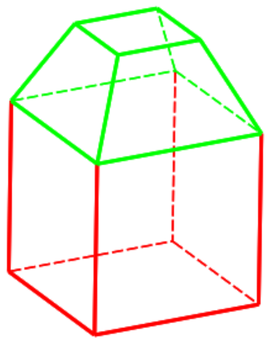


Рис. 1.

Также в ходе решения данной задачи удалось показать следующее:

- *Для любого $f \geq 6, f \neq 7$ существует многогранник, имеющий f граней, все грани которого четырёхугольники.*

Доказательство

Для начала отметим, что любому выпуклому многограннику соответствует трёхсвязный планарный граф, и наоборот – любому трёхсвязному планарному графу соответствует выпуклый многогранник с точностью до изоморфизма (теорема Штейница).

При помощи этого утверждения удалось построить многогранник, состоящий из нечётного числа четырёхугольников. Первым был построен граф девятигранника, изображённый на рисунке 2, затем он был «выровнен», и по нему была построена сама фигура. Искомый девятигранник изображён на рисунке 4. Аналогичным образом был получен одиннадцатигранник (рисунки 5, 6).

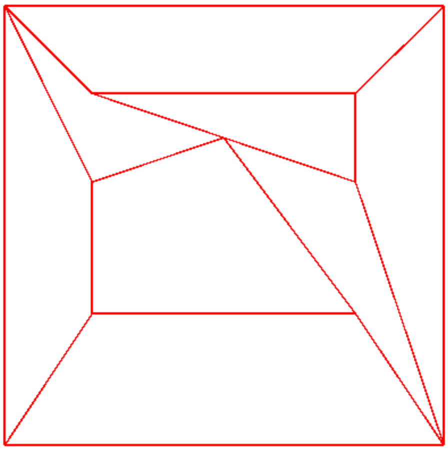


Рис. 2. Граф девятигранника

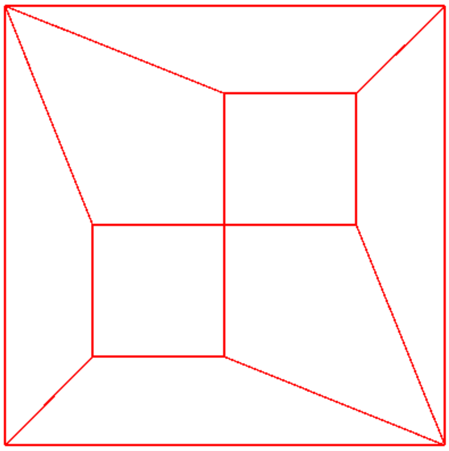


Рис. 3. Тот же граф, но «выровненный»

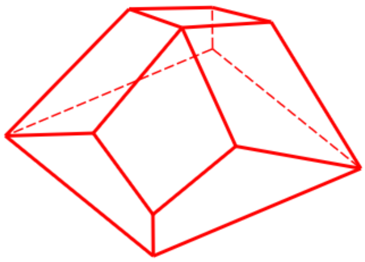


Рис. 4. Девятигранник

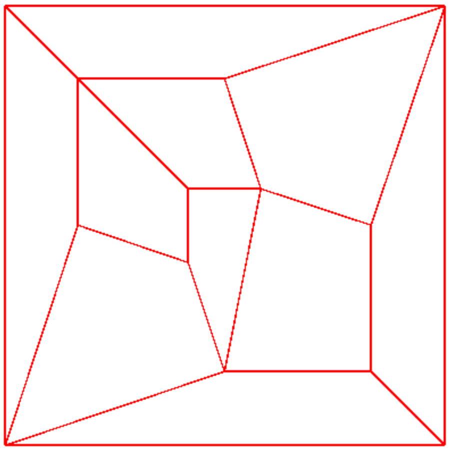


Рис. 5. Граф одиннадцатигранника

Выше был показан метод, позволяющий увеличивать число граней на 4. Понятно, что этот метод работает и в данном случае. Таким образом, удалось показать, что для $f \equiv 1 (mod\ 4)$ и $f \equiv 3 (mod\ 4)$, $f \geq 9$, то есть для всех нечётных $f \geq 9$ существуют искомые многогранники.

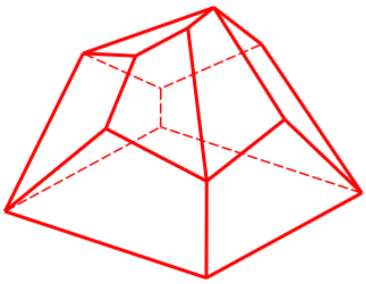
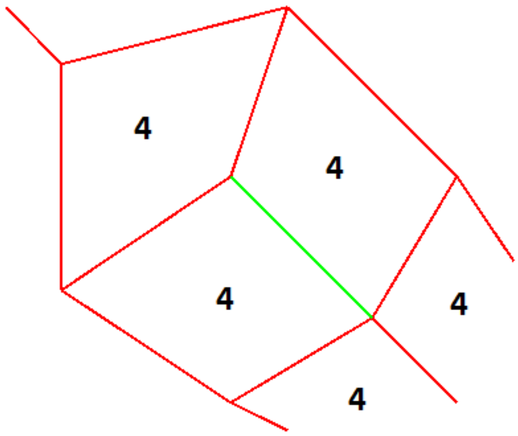


Рис. 6. Одиннадцатигранник

Помимо рассмотренных чётных и нечётных f остаётся несколько случаев, рассмотрим их. Понятно, что при $f < 4$ никакого многогранника не может существовать. При $f = 4$ существует лишь тетраэдр. Остаются случаи $f = 5$ и $f = 7$. Для первого случая воспользуемся формулой Эйлера. Пусть v, e – количество вершин и рёбер многогранника соответственно. Тогда выполняется соотношение $v + f - e = 2$. Так как все грани – четырёхугольники, количество рёбер можно найти по формуле $e = \frac{4f}{2} = 2f$, отсюда находим $v = 2 + e - f = 2 + 2f - f = f + 2$. Подставляя $f = 5$, вычисляем остальное: $e = 10$, $v = 7$. Сумма степеней вершин равна удвоенному числу рёбер, т.е. 20. Но степень вершины должна быть не меньше трёх, то есть это число должно быть не менее 21. Противоречие.

Теперь рассмотрим $f = 7$. Аналогичным образом находим: $e = 14$, $v = 9$. Сумма степеней вершин равна 28. Это возможно только в том случае, если степень одной вершины 4, а остальных вершин 3. Предположим, что существует соответствующий планарный трёхсвязный граф. На каждом рисунке приведён лишь фрагмент. Проделаем с ним следующие операции:

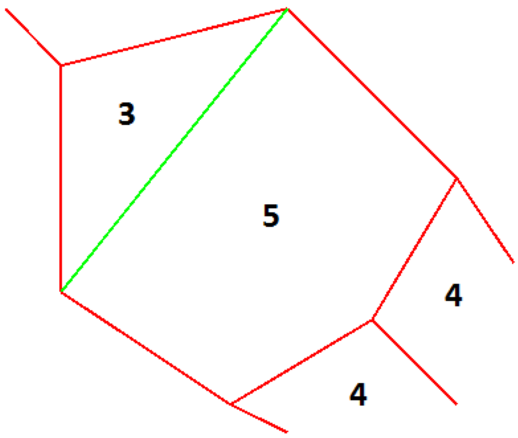
1. Удалим ребро, примыкающее к вершине степени 4, оно выделено зелёным. Вершину, соединяющую оставшиеся два ребра, мы убираем, а сами рёбра «соединяем» в одно. Таким образом, рёбер стало на два меньше, вершин на одну, а три четырёхугольные грани превратились в пятиугольную и треугольную. Граф при этом остался трёхсвязным.



$v = 9, e = 14, f = 7$

4 4 4 4 4 4 4

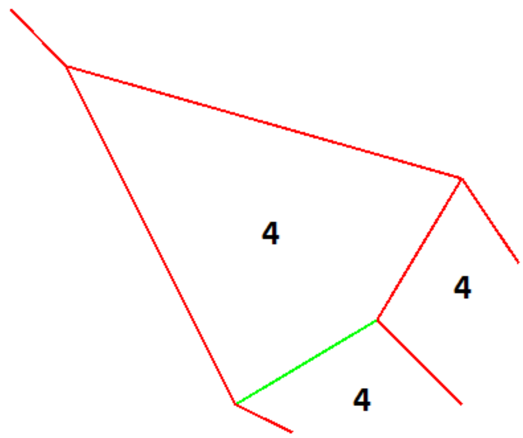
2. Вновь удалим выделенное ребро, аналогичным образом «соединив» рёбра. Рёбер становится на три меньше, вершин на две меньше, треугольная и пятиугольная грани становятся одной четырёхугольной. При этом заметим, что две грани (они не изображены, но как бы находятся слева и справа) «потеряли» свой угол и стали треугольными. Трёхсвязность не теряется.



$v = 8, e = 12, f = 6$

5 4 4 4 4 3

3. Снова делаем по аналогии. Внимательно считаем количество углов у новой фигуры. Два четырёхугольника соединяются по ребру, убираем ребро – получаем шестиугольник, при этом видно, что пропадают также два угла, и получается четырёхугольник. Но в четырёхграннике не может быть четырёхугольника. Такой конструкции, а значит, и исходной конструкции не существует.



$v = 6, e = 9, f = 5$

$4\ 4\ 4\ 3\ 3$

Подводим итоги. Искомые многогранники существуют для чётных f, начиная с 6, а также для нечётных f, начиная с 9. Таким образом, они существуют при любом $f \geq 6, f \neq 7$. □