О. Б. Полубасов   25.11.2015 г.

===========MM209===============

MM209 (9 баллов)

Эта задача прямое продолжение задач MM29 и MM39

Решения принимаются до 27.11.2015

Назовем натуральное число a третькубом, по основанию g, если дважды приписав в g-ичной системе a к себе получим полный куб. Доказать, что существует бесконечно много оснований g, для которых есть третькубы.

===============================

При g = 1 существует бесконечно много третькубов. Далее будем считать, что g > 1.

Пусть a – одноразрядное число по основанию g, 0 < a < g.

Тогда $aaa_{(g)} = a(g^2 + g + 1) = b^3$.

Пусть a – n-разрядное число по основанию h, $h^{n-1} \le a < h^n$, так как ведущие нули запрещены. Тогда $a(h^{2n} + h^n + 1) = b^3$. Положив $g = h^n$, получим предыдущее уравнение. Домножением на куб подходящего числа добиваемся, чтобы a стало n- разрядным по основанию h. Это возможно, так как при h > 7 разрядность чисел последовательности a, 8a, 27a… увеличивается не более чем на 1. Следовательно, достаточно рассмотреть только одноразрядные третькубы. Все многоразрядные получаются из них, когда g является точной степенью (если такое возможно).

Рассмотрим уравнение: $g^2 + g + 1 = r^3s^2t$. (1)

В качестве a подойдёт $a = st^2$, где a < g. Тогда $aaa_{(g)} = (rst)^3$.

Выберем величины r и t, t < r – 1. Рекомендации для выбора приведены в приложении.

Легко видеть, что r < g, поэтому $\frac{t}{r} < \frac{r-1}{r} < \frac{g}{g+1} < 1$, $\left(\frac{t}{r}\right)^3 < \left(\frac{t}{r}\right)^2 < \left(\frac{g}{g+1}\right)^2$.

Следовательно, $a^2 = s^2t^4 = (g^2+g+1)\frac{t^3}{r^3} < (g+1)^2\left(\frac{t}{r}\right)^3 < g^2$.

Если значение a окажется гораздо меньше чем g, то его можно домножить на куб подходящего числа, получив другую пару (g, a), но мы этого делать не будем, так как количество различных оснований g при этом не изменяется.

Сделав в (1) замену переменных: x = 2g+1, y = 2rs, d = rt, сведём уравнение (1) к общему уравнению Пелля: $x^2 – dy^2 = -3$. (2)

При подходящем d решением уравнения (2) является бесконечная последовательность пар (x, y), но из них необходимо выбрать такие пары, чтобы x было нечётным, а t^2y делилось на 2r. Тогда g = (x – 1)/2, $a = t^2y/2r$.

Здесь обнаружился интересный нюанс: если величина d в уравнении (2) допускает несколько разложений на r и t, то последовательность даёт решения для всех таких разложений.

Если d = 7, то уравнение (2) имеет две бесконечные серии решений.

1. $x_0 = 2$, $y_0 = 1$, $x_i = 8x_{i-1} + 21y_{i-1}$, $y_i = 3x_{i-1} + 8y_{i-1}$.
2. $x_0 = 5$, $y_0 = 2$, $x_i = 8x_{i-1} + 21y_{i-1}$, $y_i = 3x_{i-1} + 8y_{i-1}$.

Теперь надо учесть, что x должен быть нечётным, а y – кратным 14. В первой последовательности этим свойством обладает каждый 14-й член, начиная с i = 1, а во второй – каждый 14-й член, начиная с i = 12.

Начало первой последовательности.

1: g = 18, a = 1.
15: g = 1262403975253755261, a = 68163407604505591.
29: g = 86096847085670000196084962450078322, a = 4648792776641611806648016064581393.
43: g = 587186607726201582512867240140368688874406949731945 3,
a = 31705096678187087667578962171535335626807133030167 1.

Начало второй последовательности.

12: g = 690845140450082, a = 37302131348743.
26: g = 47116128896261596331524418282573, a = 2544031832644333879196802002161.
40: g = 3213353430731035968898496435994818373826906198466,
a = 173504776576949765279238012629998887076917867031.
54: g = 2191529846079990900605810119926674948154338516736747731771 19896237,
a = 118331489051088088632777847221268880351563228926746495989950601 93.

Теорема 1.

Если в последовательности (x, y), являющейся решением уравнения (2), хотя бы один раз выпала некоторая пара (x mod z, y mod z), то эта пара выпадет бесконечное количество раз.

Доказательство.

Поскольку количество различных пар (x mod z, y mod z) не превышает z^2, а последовательность бесконечна, то хотя бы одна пара должна выпадать бесконечное количество раз. Пусть впервые она выпала при i = m, а второй раз – при i = m+k. Пары (x_i mod z, y_i mod z) и (x_{i+k} mod z, y_{i+k} mod z) связаны линейной зависимостью:

$$(x_{i+k} \bmod z) = a_k(x_i \bmod z) + b_k(y_i \bmod z),$$
$$(y_{i+k} \bmod z) = c_k(x_i \bmod z) + a_k(y_i \bmod z),$$

поэтому любая пара (x mod z, y mod z), выпав однократно, будет выпадать бесконечно с периодичностью k.

Ответ. Явно построены две бесконечные последовательности оснований g.

Приложение

1. Рекомендации по выбору значений r и t при решении уравнения (1)

Утверждение 1.

$g^2 + g + 1$ не делится на простые числа вида 3n-1.

Доказательство.

Рассмотрим произвольное простое число $p = 3n-1$. Если g кратно p, то для данного p утверждение верно.

Пусть g не кратно p, а следовательно, взаимно просто с ним. Тогда, по теореме Ферма, $g^{3n-2} \bmod p = 1$.

Предположим, что $(g^2 + g + 1) \bmod p = 0$. Тогда $(g^3 – 1) \bmod p = 0$, то есть, $g^3 \bmod p = 1$. Тогда и $g^{3n} \bmod p = 1$. Тогда и $g^2 \bmod p = 1$. Тогда и $g \bmod p = 1$. Тогда $(g^2 + g + 1) \bmod p = 3$. Противоречие.

Утверждение 2.

Легко проверяется, что $g^2 + g + 1$ не может быть кратно 9, хотя может быть кратно 3. Следовательно, все простые делители $g^2 + g + 1$ имеют вид 6n+1, кроме, может быть, одной тройки.

Утверждение 3.

Пусть $g^2 + g + 1 = r^3s^2t$. Тогда все простые делители r и все простые делители s имеют вид 6n+1, а вот число t может иметь делителем и тройку. Кроме того, rt не является полным квадратом.

Доказательство.

Если rt – полный квадрат, то и вся правая часть равенства – полный квадрат. Но левая часть не может быть квадратом, так как её значение находится между двух последовательных квадратов: $g^2 < g^2 + g + 1 < (g+1)^2$.

Утверждение 4.

Необходимо $t < r$.

Доказательство.

Пусть $t \geq r$. Тогда $a^2 = s^2t^4 \geq r^3s^2t = g^2 + g + 1 > g^2$.

Следствие.

$d = rt \geq 7$.

2. Другие последовательности

Если d = 13, то уравнение (2) имеет две бесконечные серии решений.

1. $x_0 = 7$, $y_0 = 2$, $x_i = 649x_{i-1} + 2340y_{i-1}$, $y_i = 180x_{i-1} + 649y_{i-1}$.
2. $x_0 = 137$, $y_0 = 38$, $x_i = 649x_{i-1} + 2340y_{i-1}$, $y_i = 180x_{i-1} + 649y_{i-1}$.

Заметим, что x всегда нечётен, а y всегда чётен. Требуется, чтобы y был кратен 26. В первой последовательности этим свойством обладает каждый 13-й член, начиная с i = 11, а во второй – каждый 13-й член, начиная с i = 1.

Начало первой последовательности.

11: g = 62601762954110478052261782187936011, a = 1335585007488090818776844728296583.

24: g = 1858464264743490815170763967161472861060036962650377179976280291834694233443,
a = 39649634320415019982694692067440978463125865645952718229846048774376870037.

Начало второй последовательности.

1: g = 88916, a = 1897.

14: g = 2639672271228477709445165161267490169197303228,
a = 56316412570028185164454470281348421675090523.

Если d = 19, то уравнение (2) имеет две бесконечные серии решений.

1. $x_0 = 4$, $y_0 = 1$, $x_i = 170x_{i-1} + 741y_{i-1}$, $y_i = 39x_{i-1} + 170y_{i-1}$.
2. $x_0 = 61$, $y_0 = 14$, $x_i = 170x_{i-1} + 741y_{i-1}$, $y_i = 39x_{i-1} + 170y_{i-1}$.

Теперь надо учесть, что x должен быть нечётным, а y – кратным 38. В первой последовательности этим свойством обладает каждый 38-й член, начиная с i = 5, а во второй – каждый 38-й член, начиная с i = 32.

Начало первой последовательности.

5: g = 9494342272670, a = 114639552637.

Начало второй последовательности.

32: g = 31016477397661614259305716790158727036617358599876786459888072180194072931420320350,
a = 374508838119170055620590539202625145721408038798308494500969537452327598189231133.

Если d = 21, то уравнение (2) имеет бесконечную серию решений.

$x_0 = 9$, $y_0 = 2$, $x_i = 55x_{i-1} + 252y_{i-1}$, $y_i = 12x_{i-1} + 55y_{i-1}$.

Заметим, что x всегда нечётен, а y всегда чётен. Требуется, чтобы y был кратен 14. Этим свойством обладает каждый 7-й член, начиная с i = 3.

Начало последовательности.

3: g = 6042955, a = 1695447.

10: g = 1176919927520329404220, a = 330203550291664308363.

17: g = 229215739846909398233742135630654259, a = 64310110917781705937844932587907043.

24: g = 44641826657029313612661456435851761187801569188964,
a = 12524972437771484736296515155173549973101481430527.

31: g = 8694397202422850724793290035213236920143986006319299822370686075,
a = 2439351018496837121685977805124010905167701972575807131606805167.

3. Наименьшие значения g

Из уравнения (1) следует, что одноразрядные третькубы существуют не при любых основаниях g. Наименьшие g, при которых существуют одноразрядные третькубы, приведены в таблице 1. Многоразрядных третькубов найти не удалось (кроме случая g = 1).

g	a	$g^2 + g + 1$
18	1	7^3
88 916	1897	$13^3 * 7^2 * 271^2$
1 147 805	190801	$43^3 * 1129^2 * 13$
6 042 955	1695447	$7^3 * 13^2 * 43^2 * 337^2 * 3$

Таб. 1. Наименьшие основания g, при которых существуют одноразрядные третькубы.

Обобщение

В задаче ММ29 были рассмотрены полуквадраты, в задаче ММ39 - полукубы, а в задаче ММ209 – третькубы. Не хватает третьквадратов.

Назовем натуральное число a третьквадратом по основанию $g > 1$, если дважды приписав в g-ичной системе a к себе, получим полный квадрат.

Достаточно рассмотреть только одноразрядные третьквадраты. Все многоразрядные получаются из них, когда g является точной степенью (если такое возможно).

Рассмотрим уравнение: $g^2 + g + 1 = s^2t$. (3)
В качестве a подойдёт $a = tk^2$, где k выбирается из условия $a < g$. Тогда $aaa_{(g)} = (stk)^2$.

Выберем величину t. Все простые делители t должны иметь вид 6n+1, кроме, может быть, одной тройки. Кроме того, t не должно быть полным квадратом, а значит, $t \geq 3$.

Следовательно, имеет место следующее утверждение.

Утверждение 5.

Простые делители вида 3n-1 могут входить в каноническое разложение числа a только в чётных степенях.

Сделав в (3) замену переменных: $x = 2g+1$, $y = 2s$, $d = t$, сведём уравнение (3) к общему уравнению Пелля: $x^2 – dy^2 = -3$.

Получившееся уравнение совпадает с уже рассмотренным уравнением (2). Но есть две разницы.

1. Из бесконечной последовательности пар (x, y), являющихся решениями уравнения (2), необходимо выбрать такие пары, чтобы x было нечётным и большим чем 2t+1, а y - чётным. Тогда $g = (x – 1)/2$, $a = t$. Это – гораздо большая свобода, чем в случае третькубов.
2. Поэтому теперь допустимо $d = 3$.

Утверждение 6.

Если для основания g существуют третькубы, то существуют и третьквадраты.

Доказательство.

Пусть $g^2 + g + 1 = r^3s^2t$, $t < r – 1$, $r \geq 7$.

Предположим, что $g \le rt$. Тогда
$g < r(r - 1) = r^2 - r \le r^2 - 7$,
$g + 7 < r^2$,
$g^2 + g + 1 < g(g + 7) < r^2rt \le r^3s^2t = g^2 + g + 1$.

Противоречие. Следовательно, $g > rt$.

Положим $s' = rs$, $t' = rt$, тогда $g^2 + g + 1 = s'^2t'$, $a' = t' = rt < g$.

Из уравнения (3) следует, что одноразрядные третьквадраты существуют не при любых основаниях g. Наименьшие g, при которых существуют одноразрядные третьквадраты, приведены в таблице 2. Многоразрядных третьквадратов найти не удалось (кроме случая g = 1).

g	a	$g^2 + g + 1$
18	7	$7^2 * 7$
22	3	$13^2 * 3$
30	19	$7^2 * 19$
68	13	$19^2 * 13$
146	127	$13^2 * 127$
292	237	$19^2 * 3 * 79$
313	3	$181^2 * 3$
423	97	$43^2 * 97$
439	201	$31^2 * 3 * 67$
499	21	$109^2 * 3 * 7$
521	283	$31^2 * 283$
581	247	$37^2 * 13 * 19$
653	7	$13^2 * 19^2 * 7$
699	109	$67^2 * 109$
710	19	$163^2 * 19$
787	453	$37^2 * 3 * 151$
1047	457	$7^4 * 457$
1353	763	$7^4 * 7 * 109$

Таб. 2. Наименьшие основания g, при которых существуют одноразрядные третьквадраты.

Если d = 3, то уравнение (2) имеет бесконечную серию решений.
$x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $x_i = 2x_{i-1} + 3y_{i-1}$, $y_i = x_{i-1} + 2y_{i-1}$.

Теперь надо учесть, что x должен быть нечётным, а y – чётным. Этим свойством обладает каждый второй член, начиная с i = 3.

Начало последовательности.

3: g = 22, a = 3.
5: g = 313, a = 3.
7: g = 4366, a = 3.
9: g = 60817, a = 3.
11: g = 847078, a = 3.
13: g = 11798281, a = 3.
15: g = 164328862, a = 3.
17: g = 2288805793, a = 3.

Если d = 7, то уравнение (2) имеет две бесконечные серии решений.

3. $x_0 = 2$, $y_0 = 1$, $x_i = 8x_{i-1} + 21y_{i-1}$, $y_i = 3x_{i-1} + 8y_{i-1}$.
4. $x_0 = 5$, $y_0 = 2$, $x_i = 8x_{i-1} + 21y_{i-1}$, $y_i = 3x_{i-1} + 8y_{i-1}$.

Теперь надо учесть, что x должен быть нечётным, а y – чётным. В первой последовательности этим свойством обладает каждый второй член, начиная с i = 1, а во второй – каждый второй член, начиная с i = 2.

Начало первой последовательности.

1: g = 18, a = 7.
3: g = 4701, a = 7.
5: g = 1194162, a = 7.
7: g = 303312573, a = 7.
9: g = 77040199506, a = 7.
11: g = 19567907362077, a = 7.

Начало второй последовательности.

2: g = 653, a = 7.
4: g = 165986, a = 7.
6: g = 42159917, a = 7.
8: g = 10708453058, a = 7.
10: g = 2719904916941, a = 7.
12: g = 690845140450082, a = 7.

Таким образом, конструктивно доказано следующее утверждение.

Утверждение 7.

Существует бесконечно много g, таких что в системе счисления с основанием g существуют третьквадраты.