Конкурсная задача ММ204 (5 баллов)

Найти натуральное число, которое в трёх различных системах счисления записывается 102, 201 и 20001 соответственно.

Решение. Обозначим основания этих систем счисления через a, b и c соответственно. Тогда a, b, c — натуральные числа, большие единицы. Обозначим искомое число через n. Тогда

$n = 2 + a^2$,

$n = 1 + 2b^2$,

$n = 1 + 2c^4$.

Исключив из этих уравнений n, получим

$$2b^2 - a^2 = 1, \tag{1}$$

$$b = c^2. \tag{2}$$

Уравнение (1) является отрицательным уравнением Пелля, решение которого хорошо известно. Его наименьшее натуральное решение: $a_1 = 1$, $b_1 = 1$, но оно нам не подходит, поскольку a, b, c должны быть больше единицы. Все остальные натуральные решения уравнения (1) получаются по рекуррентным формулам

$$a_{n+1} = 3a_n + 4b_n, \tag{3}$$

$$b_{n+1} = 2a_n + 3b_n, \tag{4}$$

где $n = 1, 2, \ldots$

В частности, получим

$a_2 = 7, \qquad b_2 = 5;$

$a_3 = 41, \qquad b_3 = 29;$

$a_4 = 239, \qquad b_4 = 169.$

В силу уравнения (2) нам нужно, чтобы b являлось полным квадратом. Тогда $b = 169$ нам подходит. При этом

$c = \sqrt{b} = 13, \qquad a = 239, \qquad n = 2 + a^2 = 57123.$

Будут ли среди решений уравнения (1), полученных по формулам (3), (4), другие b_n, которые являются полными квадратами, мне исследовать не удалось. Расчёты на компьютере, произведённые по формулам (3), (4), не выявили других полных квадратов среди b_n вплоть до $n = 70000$.

Обоснование того, что формулы (3), (4) действительно описывают все натуральные решения уравнения (1), является довольно простым и может быть найдено в литературе (например, В.О. Бугаенко. Уравнения Пелля. Москва, издательство МЦНМО, 2010), но поскольку доказать единственность натурального решения системы (1), (2) мне не удалось, то это обоснование я здесь не привожу. Одно решение задачи предъявлено, а есть ли другие решения, мне не известно.

Ответ. Число 57123 записывается как 102, 201 и 20001 в системах счисления с основаниями 239, 169 и 13 соответственно.