

Пусть  $k, n$  — натуральные, а  $P \geq 1$ . Введем обозначение

$$J_{k,n}(P) = \int_0^1 \dots \int_0^1 \left| \sum_{x \leq P} e^{2\pi i(\alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n)} \right|^{2k} d\alpha_1 \dots d\alpha_n.$$

Легко видеть, что величина  $J_{k,n}(P)$  имеет также смысл числа решений системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_k = x_{k+1} + \dots + x_{2k} \\ x_1^2 + \dots + x_k^2 = x_{k+1}^2 + \dots + x_{2k}^2 \\ \dots \\ x_1^n + \dots + x_k^n = x_{k+1}^n + \dots + x_{2k}^n \end{cases}$$

в натуральных  $x_1, \dots, x_{2k}$ , не превосходящих  $P$ .

**Теорема (теорема Виноградова о среднем).** Пусть  $\tau$  — натуральное,  $k \geq n\tau$ . Тогда справедливо неравенство

$$J_{k,n}(P) \leq D_\tau P^{2k - \Delta(\tau)},$$

где

$$\Delta(\tau) = \frac{n(n+1)}{2} \left( 1 - \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^\tau \right), \quad D_\tau = (n\tau)^{6n\tau} (2n)^{4n(n+1)\tau}.$$

Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{Z}$  и  $J_{k,n}(P; \lambda_1, \dots, \lambda_n)$  — число решений системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_k - x_{k+1} - \dots - x_{2k} = \lambda_1 \\ x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_{2k}^2 = \lambda_2 \\ \dots \\ x_1^n + \dots + x_k^n - x_{k+1}^n - \dots - x_{2k}^n = \lambda_n \end{cases}$$

в натуральных  $x_1, \dots, x_{2k}$ , не превосходящих  $P$ . Как мы уже знаем,  $J_{k,n}(P; \lambda_1, \dots, \lambda_n)$  можно представить в виде интеграла

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 \left| \sum_{x \leq P} e^{2\pi i(\alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n)} \right|^{2k} e^{-2\pi i(\alpha_1 \lambda_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n)} d\alpha_1 \dots d\alpha_n.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Имеют место следующие утверждения:

а)

$$J_{k,n}(P; \lambda_1, \dots, \lambda_n) \leq J_{k,n}(P; 0, \dots, 0) = J_{k,n}(P);$$

б)

$$\sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} J_{k,n}(P; \lambda_1, \dots, \lambda_n) = P^{2k};$$

в)

$$J_{k,n}(P) \geq (2k)^{-n} P^{2k - \frac{n(n+1)}{2}};$$

г) при  $k \geq n$

$$J_{k,n}(P) \leq n! P^{2k-n}.$$

Доказательства этих несложных утверждений оставляем читателю. В пункте г) следует использовать свойства симметрических многочленов.

Согласно пункту в) замечания для величины  $J_{k,n}(P)$  имеет место следующая оценка снизу

$$J_{k,n}(P) \geq (2k)^{-n} P^{2k - \frac{n(n+1)}{2}}.$$

Таким образом, теорема о среднем дает правильный порядок  $J_{k,n}(P)$  при  $k \gg n^2 \ln n$ . С другой стороны, поскольку  $J_{k,n}(P) \geq P^k$ , получить верхнюю оценку такого порядка при  $k < n(n+1)/2$  нельзя.

Докажем вначале вспомогательное утверждение.

**Лемма.** Пусть  $n \geq 2$ ,  $H = (2n)^4$ ,  $P > (2n)^{4n}$ ,  $R$  — минимальное целое число с условием  $R \geq P/H$ ,  $v_1, \dots, v_n$  — целые с условиями  $X_i < v_i \leq Y_i = X_i + R$ , причем  $Y_i + R \leq X_{i+1}$ ,  $-RH \leq X_1$ ,  $Y_n \leq RH$ . Пусть  $V_i = v_1^i + \dots + v_n^i$ ,  $E$  — число пар наборов  $v_1, \dots, v_n$  и  $v'_1, \dots, v'_n$  таких, что разности  $V_i - V'_i$  лежат в некоторых промежутках с длинами  $P^{i(1-1/n)}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Тогда имеет место оценка

$$E \leq 80H^{\frac{n(n-3)}{2}} P^{\frac{3n-1}{2}}.$$

В доказательстве решающую роль играет то обстоятельство, что значения  $v_i$  отделены друг от друга.

*Доказательство.* Пусть  $E_1$  — количество наборов  $v_1, \dots, v_n$  таких, что величины  $V_i$  лежат в некоторых промежутках с длинами  $P^{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Оценим вначале  $E_1$ . Пусть  $s$  — целое с условием  $1 < s \leq n$ . Пусть  $v_{s+1}, \dots, v_n$  заданы. Тогда  $v_1^i + \dots + v_s^i$ ,  $i = 1, \dots, s$ , тоже лежат в некоторых промежутках с длинами  $P^{i-1}$ .

Пусть  $\eta_1, \dots, \eta_s$  и  $\eta_1 + \xi_1, \dots, \eta_s + \xi_s$  — два таких набора, причем  $\eta_s$  минимально, то есть  $\xi_s \geq 0$ . Мы получим верхнюю оценку для  $\xi_s$ , считая  $\xi_s > 0$ . Записывая условия попадания в промежутки, имеем

$$\frac{(\eta_1 + \xi_1)^i - \eta_1^i}{i\xi_1} \xi_1 + \dots + \frac{(\eta_s + \xi_s)^i - \eta_s^i}{i\xi_s} \xi_s = \frac{\theta_{i-1}}{i} P^{i-1}$$

при  $i = 1, \dots, s$ ,  $|\theta_{i-1}| \leq 1$ . Если какое-то из  $\xi_k$  равно нулю, заменим коэффициент при нем величиной  $\eta_k^{i-1}$  "по непрерывности". Аналогичные замены предполагаются далее по умолчанию. Вводя обозначения

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{(\eta_1 + \xi_1) - \eta_1}{\xi_1} & \dots & \frac{(\eta_j + \xi_j) - \eta_j}{\xi_j} & \dots & \frac{(\eta_s + \xi_s) - \eta_s}{\xi_s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{(\eta_1 + \xi_1)^i - \eta_1^i}{i\xi_1} & \dots & \frac{(\eta_j + \xi_j)^i - \eta_j^i}{i\xi_j} & \dots & \frac{(\eta_s + \xi_s)^i - \eta_s^i}{i\xi_s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{(\eta_1 + \xi_1)^s - \eta_1^s}{s\xi_1} & \dots & \frac{(\eta_j + \xi_j)^s - \eta_j^s}{s\xi_j} & \dots & \frac{(\eta_s + \xi_s)^s - \eta_s^s}{s\xi_s} \end{vmatrix}$$

и

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \frac{(\eta_1 + \xi_1) - \eta_1}{\xi_1} & \dots & \frac{(\eta_j + \xi_j) - \eta_j}{\xi_j} & \dots & \theta_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{(\eta_1 + \xi_1)^i - \eta_1^i}{i\xi_1} & \dots & \frac{(\eta_j + \xi_j)^i - \eta_j^i}{i\xi_j} & \dots & \frac{\theta_{i-1}}{i} P^{i-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{(\eta_1 + \xi_1)^s - \eta_1^s}{s\xi_1} & \dots & \frac{(\eta_j + \xi_j)^s - \eta_j^s}{s\xi_j} & \dots & \frac{\theta_{s-1}}{s} P^{s-1} \end{vmatrix},$$

заметим, что последний столбец определителя  $\Delta'$  есть умноженный на  $\xi_s$  последний столбец определителя  $\Delta$ , к которому прибавлена линейная комбинация первых  $s - 1$  столбцов, следовательно

$$\Delta \xi_s - \Delta' = 0.$$

Разложим оба определителя в этом равенстве по элементам первого столбца и, рассматривая результат как разность значений некоторой функции от  $v_1$  при  $v_1 = \eta_1 + \xi_1$  и  $v_1 = \eta_1$ , применим формулу конечных приращений Лагранжа, а затем опять запишем результат в виде определителей. Проведя такое преобразование с первыми  $s - 1$  столбцами и затем с последним столбцом, но только для первого определителя (в случае  $\xi_k = 0$  преобразование проводить не нужно), получим

$$\Delta_s \xi_s - \Delta'_s = 0,$$

где

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{i-1} & \dots & x_j^{i-1} & \dots & x_s^{i-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{s-1} & \dots & x_j^{s-1} & \dots & x_s^{s-1} \end{vmatrix},$$

а

$$\Delta'_s = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & \dots & \theta_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{i-1} & \dots & x_j^{i-1} & \dots & \frac{\theta_{i-1}}{i} P^{i-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{s-1} & \dots & x_j^{s-1} & \dots & \frac{\theta_{s-1}}{s} P^{s-1} \end{vmatrix},$$

причем  $X_i < x_i \leq Y_i$ .

Разлагая определитель  $\Delta_s$  по элементам последнего столбца, найдем

$$\Delta_s = \sum_{r=0}^{s-1} U_r x_s^r.$$

Это многочлен степени  $s-1$  относительно  $x_s$  со старшим коэффициентом  $\Delta_{s-1}$ , корни которого суть  $x_1, \dots, x_{s-1}$ , следовательно

$$\Delta_s = \Delta_{s-1}(x_s - x_1) \dots (x_s - x_{s-1}).$$

Величина  $U_r$  — коэффициент этого многочлена при  $x_s^r$ , поэтому

$$U_r = \Delta_{s-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{s-1-r} \leq s-1} (-x_{i_1}) \dots (-x_{i_{s-1-r}}),$$

откуда, пользуясь тем, что модули  $x_i$  не превосходят  $RH$ , получим

$$|U_r| \leq |\Delta_{s-1}| C_{s-1}^r R^{s-1-r} H^{s-1-r}.$$

С другой стороны, разлагая по элементам последнего столбца определитель  $\Delta'_s$ , найдем

$$\Delta'_s = \sum_{r=0}^{s-1} \frac{\theta_r}{r+1} P^r U_r.$$

Собирая вместе полученные соотношения, имеем для  $\xi_s$  оценку

$$\xi_s = \frac{\Delta'_s}{\Delta_s} \leq \frac{R^{s-1} H^{s-1}}{(x_s - x_1) \dots (x_s - x_{s-1})} \sum_{r=0}^{s-1} \frac{C_{s-1}^r}{r+1}.$$

Но числа  $x_i$  отделены друг от друга, точнее  $x_s - x_k \geq R(2s - 2k - 1)$  при  $k = 1, \dots, s-1$ , поэтому

$$\xi_s \leq \frac{H^{s-1}}{s(2s-3)!!} \sum_{r=0}^{s-1} C_s^{r+1} \leq \frac{(2^{s+1} - 2)H^{s-1}}{(2s-1)!!},$$

где, как обычно,  $(2s-1)!! = 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2s-1)$ . Пользуясь тем, что  $2H^{s-1} = 2(2n)^{4s-4} \geq (2s-1)!!$ , можно переписать эту оценку в виде

$$\xi_s \leq \frac{4H^{s-1}}{(2 - \frac{1}{2}) \dots (s - \frac{1}{2})} - 1 \leq 4e^{s-1} s^{-s} H^{s-1} - 1,$$

ибо в силу вогнутости логарифма справедливо неравенство

$$\ln\left(2 - \frac{1}{2}\right) + \dots + \ln\left(s - \frac{1}{2}\right) \geq \int_1^s \ln x dx = s \ln s - s + 1.$$

Таким образом,  $v_s$  при  $s \geq 2$  имеет не более  $4e^{s-1} s^{-s} H^{s-1}$  различных значений, если  $v_{s+1}, \dots, v_n$  фиксированы. Но  $v_1$  при фиксированных  $v_2, \dots, v_n$  лежит в промежутке длины 1, имея не более двух различных значений. Отсюда для величины  $E_1$  находим оценку

$$E_1 \leq 2 \prod_{s=2}^n 4e^{s-1} s^{-s} H^{s-1} \leq 8H^{\frac{n(n-1)}{2}},$$

так как при  $s \geq 4$  имеем  $4e^{s-1} s^{-s} \leq 1$ .

Теперь перейдем к оценке величины  $E$ . Число наборов  $v_1, \dots, v_n$  не превосходит  $R^n$ . Для каждого такого набора величины  $V_i'$  должны лежать в некоторых промежутках с длинами  $P^{i(1-1/n)}$ . Разобьем их на промежутки длины  $P^{i-1}$ , быть может, предварительно чуть расширив; при  $i = n$ , очевидно, разбивать не требуется. Количество полученных в результате систем промежутков не превзойдет

$$\prod_{i=1}^{n-1} \left(1 + \frac{P^{i(1-\frac{1}{n})}}{P^{i-1}}\right) = P^{\frac{n-1}{2}} \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 + P^{\frac{i}{n}-1}\right) \leq P^{\frac{n-1}{2}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq eP^{\frac{n-1}{2}},$$

ибо  $P > (2n)^{4n}$ . Далее, так как  $R \leq P/H + 1$ , имеем

$$R^n \leq \frac{P^n}{H^n} \left(1 + \frac{H}{P}\right)^n \leq \frac{P^n}{H^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \frac{eP^n}{H^n}.$$

Собирая вместе полученные оценки, приходим к неравенству

$$E \leq R^n \cdot eP^{\frac{n-1}{2}} \cdot E_1 \leq 8e^2 P^{\frac{3n-1}{2}} H^{\frac{n(n-3)}{2}},$$

что и требовалось. ■

*Доказательство теоремы.* Не теряя общности, можно считать  $P$  натуральным. При  $n = 1$ , как и при  $\tau = 1$ , утверждение теоремы вытекает из пункта г) замечания. Далее, достаточно доказать искомую оценку при  $k = n\tau$ . Действительно, если  $k = n\tau + m$  с положительным  $m$ , то

$$J_{k,n}(P) \leq P^{2m} J_{n\tau,n}(P) \leq D_\tau P^{2m} P^{2n\tau - \Delta(\tau)} = D_\tau P^{2k - \Delta(\tau)}.$$

Наконец, утверждение теоремы тривиально при  $P \leq D_\tau^{1/\Delta(\tau)}$ , ибо

$$J_{k,n}(P) \leq P^{2k} \leq D_\tau P^{-\Delta(\tau)} P^{2k}.$$

Итак, достаточно доказать теорему при  $n, \tau \geq 2$ ,  $k = n\tau$ ,  $P > D_\tau^{1/\Delta(\tau)}$ .

Нам понадобятся верхние оценки для  $\Delta(\tau)$ . С одной стороны, отбрасывая вычитаемое, имеем

$$\Delta(\tau) \leq \frac{n(n+1)}{2},$$

с другой стороны, пользуясь тем, что  $(1 - 1/n)^\tau \geq 1 - \tau/n$ , найдем

$$\Delta(\tau) \leq \frac{\tau(n+1)}{2} \leq n\tau.$$

Из полученных оценок вытекает, что  $D_\tau^{1/\Delta(\tau)} \geq \max((2n)^{8n}, (2n)^{8\tau})$  и что  $2k - \Delta(\tau) \geq k$ .

Проведем доказательство индукцией по  $\tau$  и  $P$ . Точнее, предполагая справедливость утверждения теоремы при  $\tau \leq m$ ,  $P \leq Q$  и  $\tau \leq m + 1$ ,  $P < Q$ , докажем его при  $\tau = m + 1$ ,  $P = Q$ . Положим  $k = n(m + 1)$ ,

$H = (2n)^4$ ,  $R$  — минимальное целое с условием  $R \geq Q/H$ . Нетрудно видеть, что

$$J_{k,n}(Q) \leq J_{k,n}(RH)$$

как число решений соответствующей системы уравнений. Оценим величину  $J_{k,n}(RH)$ . Вводя обозначение  $f(x) = \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n$ , имеем

$$S = \sum_{x=1}^{RH} e^{2\pi i f(x)} = \sum_{y=0}^{H-1} \sum_{z=1}^R e^{2\pi i f(z+Ry)} = \sum_{y=0}^{H-1} S(y),$$

откуда, возводя в  $k$ -ую степень, получаем

$$S^k = \sum_{y_1=0}^{H-1} \dots \sum_{y_k=0}^{H-1} S(y_1) \dots S(y_k).$$

Назовем набор  $y_1, \dots, y_k$  *правильным*, если среди  $y_1, \dots, y_k$  есть  $n$  чисел, модуль разности любых двух из которых больше единицы. Все остальные наборы назовем *неправильными*, для них среди любых  $n$  чисел найдутся два, модуль разности которых не превосходит единицы. Тогда  $S^k = W_1 + W_2$ , где  $W_1$  — сумма  $S(y_1) \dots S(y_k)$  по правильным наборам  $y_1, \dots, y_k$ , а  $W_2$  — по неправильным. В силу неравенства Коши

$$J_{k,n}(RH) \leq 2J_1 + 2J_2,$$

где введено обозначение

$$J_1 = \int_0^1 \dots \int_0^1 |W_1|^2 d\alpha_1 \dots d\alpha_n$$

и аналогичное для интеграла  $J_2$ .

Оценим интеграл  $J_1$ . Согласно неравенству Коши имеем

$$J_1 \leq H^{2k} \int_0^1 \dots \int_0^1 |S(y_1) \dots S(y_k)|^2 d\alpha_1 \dots d\alpha_n,$$

где  $y_1, \dots, y_k$  таковы, что интеграл принимает максимальное значение. Поскольку набор  $y_1, \dots, y_k$  правилен, не ограничивая общности, можно считать, что  $y_1 < y_2 < \dots < y_n$ ,  $y_{l+1} - y_l > 1$ ,  $l = 1, \dots, n-1$ . При  $l > n$  разобьем каждую сумму  $S(y_l)$  на не более  $t = [Q^{-1+1/n}] + 1$  сумм длины не большей  $Q^{1-1/n}$ , что приводит нас к оценке

$$J_1 \leq H^{2k} t^{2(k-n)} \int_0^1 \dots \int_0^1 |S(y_1) \dots S(y_n) S'(y_{n+1}) \dots S'(y_k)|^2 d\alpha_1 \dots d\alpha_n,$$

где  $S'(y_l)$  — одна из сумм, полученных разбиением  $S(y_l)$ , причем в правой части неравенства стоят суммы, дающие максимальное значение интеграла. Пользуясь неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим, находим

$$|S'(y_{n+1}) \dots S'(y_k)|^2 \leq \frac{1}{k-n} \left( |S'(y_{n+1})|^{2(k-n)} + \dots + |S'(y_k)|^{2(k-n)} \right),$$

откуда, вновь выбирая сумму, дающую максимальное значение интеграла, получаем для  $J_1$  оценку

$$J_1 \leq H^{2k} t^{2(k-n)} \int_0^1 \dots \int_0^1 |S(y_1) \dots S(y_n)|^2 |S'(y)|^{2(k-n)} d\alpha_1 \dots d\alpha_n.$$

Интеграл в последнем равенстве не превосходит числа решений  $J$  системы уравнений

$$\begin{aligned} (z_1 + Ry_1)^l + \dots - (z_{2n} + Ry_{2n})^l &= \\ &= (z_{2n+1} + a)^l + \dots - (z_{2k} + a)^l, \quad l = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

в натуральных  $z_1, \dots, z_{2n} \leq R$ ,  $z_{2n+1}, \dots, z_{2k} \leq Q^{1-1/n}$ . Действительно, расширяя интервал изменения переменных в случае неполной суммы  $S'$ , мы только увеличиваем число решений. Здесь  $y_1, \dots, y_n, a$  обозначают фиксированные целые числа с условиями  $0 \leq y_1 < \dots < y_n \leq H-1$ ,  $y_{l+1} - y_l > 1$ ,  $l = 1, \dots, n-1$ ,  $0 \leq a \leq RH$ . Далее, раскрывая скобки мы видим, что  $(x_1 + A)^l + \dots - (x_{2k} + A)^l = 0$ ,  $l = 1, \dots, n$ , при любом  $A$ , если только  $x_1^l + \dots - x_{2k}^l = 0$ ,  $l = 1, \dots, n$ . Следовательно, наша система эквивалентна системе

$$\begin{aligned} (z_1 + Ry_1 - a)^l + \dots - (z_{2n} + Ry_{2n} - a)^l &= \\ &= z_{2n+1}^l + \dots - z_{2k}^l, \quad l = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

с теми же условиями на неизвестные. Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  — целые числа,  $J'(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  — число решений системы уравнений

$$(z_1 + Ry_1 - a)^l + \dots - (z_{2n} + Ry_{2n} - a)^l = \lambda_l, \quad l = 1, \dots, n,$$

а  $J''(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  — число решений системы уравнений

$$z_{2n+1}^l + \dots - z_{2k}^l = \lambda_l, \quad l = 1, \dots, n,$$

с теми же условиями на неизвестные, что и прежде. Тогда для величины  $J$  справедливо представление

$$J = \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} J'(\lambda_1, \dots, \lambda_n) J''(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Пользуясь результатом пункта а) замечания и предположением индукции, имеем

$$J''(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \leq J_{k-n, n}(Q^{1-\frac{1}{n}}) \leq D_m Q^{(1-\frac{1}{n})(2k-2n-\Delta(m))}.$$

С другой стороны, сумма величин  $J'(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  по всем возможным значениям  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  в силу условий на переменные  $z_{2n+1}, \dots, z_{2k}$  не превосходит числа решений системы неравенств

$$|(z_1 + Ry_1 - a)^l + \dots - (z_{2n} + Ry_{2n} - a)^l| \leq kQ^{l(1-\frac{1}{n})}, \quad l = 1, \dots, n,$$

в натуральных  $z_1, \dots, z_{2n} \leq R$ . Для того, чтобы воспользоваться леммой, следует при каждом  $l$  разбить промежуток изменения величины, стоящей под знаком модуля, на  $2k$  промежутков длины  $Q^{l(1-1/n)}$ . Применяя лемму для каждой из  $(2k)^n$  комбинаций получившихся промежутков, найдем

$$\sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} J'(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \leq (2k)^n 80H^{\frac{n(n-3)}{2}} Q^{\frac{3n-1}{2}}.$$

Отметим, что именно в этом месте мы пользуемся правильностью набора  $y_1, \dots, y_k$ .

Собирая вместе все полученные неравенства, для интеграла  $J_1$  находим оценку

$$J_1 \leq 80(2k)^n D_m t^{2(k-n)} H^{2k + \frac{n(n-3)}{2}} Q^{\frac{3n-1}{2} + (1-\frac{1}{n})(2k-2n-\Delta(m))}.$$

Вспоминая определение параметра  $t$ , имеем

$$t^{2(k-n)} \leq (RQ^{-1+\frac{1}{n}} + 1)^{2(k-n)} \leq Q^{\frac{2(k-n)}{n}} H^{-2(k-n)} (1 + 2HQ^{-\frac{1}{n}})^{2(k-n)},$$

ибо  $R \leq Q/H + 1$ . Далее, пользуясь нижней оценкой величины  $Q$ , при  $m \leq n$  получим

$$HQ^{-\frac{1}{n}} \leq (2n)^{-4} \leq \frac{1}{4mn},$$

а при  $m > n$  аналогично найдем

$$HQ^{-\frac{1}{n}} \leq (2n)^{4-8\frac{m}{n}} \leq \frac{n^{-3\frac{m}{n}}}{4n} \leq \frac{1}{4mn},$$

причем последнее неравенство вытекает из того, что функция  $\ln n/n$  убывает при  $n \geq e$ , при  $n = 2$  оно проверяется непосредственно. Подставляя полученную оценку в неравенство для величины  $t^{2(k-n)}$  и затем в оценку  $J_1$ , а также используя явное выражение для величины  $\Delta(m)$ , имеем

$$J_1 \leq 80e(2k)^n D_m H^{\frac{n(n+1)}{2}} Q^{2k-\Delta(m+1)}.$$

Наконец, поскольку  $k^n D_m \leq H^{-n(n+1)} D_{m+1}$ , в чем легко убедиться, пользуясь явным выражением для коэффициента  $D_m$ , получаем для интеграла  $J_1$  оценку

$$J_1 \leq \frac{1}{4} D_{m+1} Q^{2k-\Delta(m+1)}.$$

Оценим интеграл  $J_2$ . Пусть  $y_1, \dots, y_k$  — произвольный неправильный набор. Построим последовательность чисел  $n_1 = \min(y_1, \dots, y_k)$ ,  $n_2 = \min_{y_i \geq n_1+2}(y_1, \dots, y_k)$ , вообще  $n_j = \min_{y_i \geq n_{j-1}+2}(y_1, \dots, y_k)$ . Получаем  $0 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_l$ ,  $n_j - n_{j-1} > 1$ , где  $l \leq n-1$ , иначе набор был бы правильным. Пусть  $n_j = n_l$  при  $l < j \leq n-1$ . Таким образом, каждому неправильному набору мы поставили в соответствие некоторый набор  $n-1$  чисел из  $0, \dots, H-1$ . Каждое число  $y_i$  исходного неправильного набора либо равно одному из чисел нового набора, либо на единицу превосходит его. Следовательно, количество неправильных наборов, отвечающих данному набору  $n-1$  чисел из  $0, \dots, H-1$ , не больше  $(2n-2)^k$ , а общее количество неправильных наборов не превосходит величины  $B = H^{n-1}(2n-2)^k \leq (2n)^{4n-4+k}$ . Согласно неравенству Коши имеем

$$J_2 \leq B^2 \int_0^1 \dots \int_0^1 |S(y_1) \dots S(y_k)|^2 d\alpha_1 \dots d\alpha_n,$$

где  $y_1, \dots, y_k$  — набор, при котором интеграл принимает максимальное значение. Пользуясь неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим и как всегда выбирая сумму, дающую

максимальное значение интеграла, найдем

$$J_2 \leq B^2 \int_0^1 \dots \int_0^1 |S(y)|^{2k} d\alpha_1 \dots d\alpha_n.$$

Полученный интеграл равен числу решений системы уравнений

$$(z_1 + Ry)^l + \dots - (z_{2k} + Ry)^l = 0, \quad l = 1, \dots, n,$$

в натуральных  $z_1, \dots, z_{2k} \leq R$ , которая, как мы знаем, равносильна системе уравнений

$$z_1^l + \dots - z_{2k}^l = 0, \quad l = 1, \dots, n,$$

с теми же условиями на неизвестные. Число решений последней системы есть в точности  $J_{k,n}(R)$ , поэтому, пользуясь предположением индукции, получим для интеграла  $J_2$  оценку

$$J_2 \leq B^2 J_{k,n}(R) \leq B^2 D_{m+1} R^{2k - \Delta(m+1)}.$$

Учитывая, что  $R \leq Q/H + 1$ , и что в силу приведенной выше оценки величины  $HQ^{-1/n}$  имеем

$$(1 + HQ^{-1})^{2k - \Delta(m+1)} \leq (1 + HQ^{-\frac{1}{n}})^{4mn} \leq e,$$

а также вспоминая определения параметров  $B$  и  $H$ , приходим к неравенству

$$J_2 \leq e(2n)^{8n-8-6k+4\Delta(m+1)} D_{m+1} Q^{2k - \Delta(m+1)}.$$

Наконец, пользуясь оценкой сверху для величины  $\Delta(m+1)$ , находим

$$6k - 4\Delta(m+1) \geq 6n(m+1) - (2n+2)(m+1) \geq 8n - 4,$$

откуда немедленно получаем для интеграла  $J_2$  оценку

$$J_2 \leq \frac{1}{4} D_{m+1} Q^{2k - \Delta(m+1)},$$

что и требовалось. ■