Понятно, что для решения задачи необходимо найти такие виды чисел, которые удовлетворят заданным условиям.

1. Минимизация значения $s(n)$.

1.1. Числа вида $n = p^k$, для которых $\sigma(p^k)$ простое число.

Тогда $\sigma(n) = \dfrac{p^{k+1}-1}{p-1}$, $\varphi(\sigma(n)) = \dfrac{p^{k+1}-1}{p-1} - 1 = \dfrac{p(p^k-1)}{p-1}$.

$\varphi(n) = p^{k-1}(p-1)$, $\sigma(\varphi(n)) = \dfrac{p^k-1}{p-1}\cdot\sigma(p-1)$, т.к. p и $p-1$ взаимно просты.

В результате $s(n) = \dfrac{p}{\sigma(p-1)}$. Очевидно, что для $p > 3$ значение $s(n) < 1$. Какого-либо числа данного вида, удовлетворяющего первому вопросу, найти не удалось.

1.2. Простые числа вида $n = 2^l\prod\limits_{m=1}^{k} p_m^{\alpha_m} - 1$, для которых $2^{l-1}\prod\limits_{m=1}^{k} p_m^{\alpha_m} - 1$ тоже простое.

Тогда $\sigma(n) = 2^l\prod\limits_{m=1}^{k} p_m^{\alpha_m}$, $\varphi(\sigma(n)) = 2^{l-1}\prod\limits_{m=1}^{k} p_m^{\alpha_m-1}(p_m-1)$.

$\varphi(n) = 2^l\prod\limits_{m=1}^{k} p_m^{\alpha_m} - 2 = 2(2^{l-1}\prod\limits_{m=1}^{k} p_m^{\alpha_m} - 1)$, $\sigma(\varphi(n)) = 3\cdot 2^{l-1}\prod\limits_{m=1}^{k} p_m^{\alpha_m}$.

В результате $s(n) = \dfrac{1}{3}\prod\limits_{m=1}^{k}\dfrac{p_m-1}{p_m}$. Видно, что значение $s(n)$ не зависит от показателей α_m и может быть сколь угодно малым, т.к. каждый множитель меньше единицы. Какого-либо числа данного вида, удовлетворяющего первому вопросу, тоже найти не удалось.

1.3. При грубом переборе нашлись «интересные» числа (см. таблицу с наибольшими найденными)

n	$s(n)$	$\sigma(n)$	$\varphi(n)$
$67\cdot 1301\cdot 1429$	0,036011	$2^4\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 31$	$2^5\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 17$
$89\cdot 883\cdot 5851$	0,035187	$2^5\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19$	$2^5\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13$

Понятно, что малые значения $s(n)$ как-то связаны с гладкостью значений $\sigma(n)$ и $\varphi(n)$, но целенаправленного поиска чисел такого вида осуществить не удалось.

2. Максимизация значения $s(n)$.

Пусть $n = \prod\limits_{m=1}^{k} p_m^{\alpha_m}$ и для каждого множителя значение $\sigma(p_m^{\alpha_m})$, где $m = 1,2,\ldots,k$, есть простое число.

Тогда $\sigma(n) = \prod\limits_{m=1}^{k}\dfrac{p_m^{\alpha_m+1}-1}{p_m-1}$, $\varphi(\sigma(n)) = \prod\limits_{m=1}^{k}\left(\dfrac{p_m^{\alpha_m+1}-1}{p_m-1} - 1\right) = \prod\limits_{m=1}^{k}\dfrac{p_m(p_m^{\alpha_m}-1)}{p_m-1}$.

$\varphi(n) = \prod\limits_{m=1}^{k} p_m^{\alpha_m-1}(p_m-1) = \prod\limits_{m=1}^{k} p_m^{\alpha_m+\beta_m-1}$, где $\prod\limits_{m=1}^{k}(p_m-1) = \prod\limits_{m=1}^{m} p_m^{\beta_m}$, $\beta_m \geq 0$. Тогда

$\sigma(\varphi(n)) = \prod\limits_{m=1}^{k}\dfrac{p_m^{\alpha_m+\beta_m}-1}{p_m-1}$ и $s(n) = \prod\limits_{m=1}^{k}\dfrac{p_m(p_m^{\alpha_m}-1)}{p_m^{\alpha_m+\beta_m}-1}$ или, при больших значениях α_m,

$s(n) \approx \prod\limits_{m=1}^{k}\dfrac{p_m}{p_m^{\beta_m}} = \prod\limits_{m=1}^{k}\dfrac{p_m}{p_m-1}$. Очевидно, что значение $s(n)$ может быть сколь угодно большим, т.к. каждый множитель больше единицы.

В таблице приведены предельные значения $s(n)$ при условии, что в каноническое разложение числа n входят все простые до p_k включительно.

p_k	$s(n)$
2	2
3	3
5	3,75
7	4,375
11	4,813
13	5,214
17	5,539
19	5,847
23	6,113
29	6,331
31	6,542
37	6,724
41	6,892
43	7,056

В качестве ответа на второй вопрос подходит, например, число $n = 2^{12}3^{12}5^{6}7^{4}11^{16}13^{4}17^{2}19^{18}23^{4}29^{4}31^{6}37^{12}41^{2}43^{4}$, для которого $s(n) = 7{,}05114$.

Ответ на оба вопроса задачи утвердительный.