ММ196.

1. Три корабля A, B, и C движутся равномерно и прямолинейно.

2. Когда корабль A находился ближе всего к маяку, расстояние между B и C было 30 миль.

3. Когда корабль B находился ближе всего к маяку, расстояние между A и C было 40 миль.

4. Когда корабль C находился ближе всего к маяку, расстояние между A и B было 14 миль.

5. В 12:00 расстояния от маяка до всех кораблей были одинаковыми.

6. В 13:00 расстояния от маяка до всех кораблей были одинаковыми.

7. В 14:00 расстояния от маяка до всех кораблей были одинаковыми.

8. В 15:00 корабль B пересек маршрут корабля A.

9. В 16:00 корабль A пересек маршрут корабля B. Найти скорость каждого корабля.

Примечание: Все корабли и маяк - материальные точки.

Решение.

Рассмотрим функцию - квадрат расстояния от маяка до судна (от времени), это многочлен 2-ого порядка. По известным значениям в 3-х точках такая парабола определяется однозначно (все 3 коэффициента вычисляются). Тогда, если значения 2-х таких многочленов совпадают в 3-х различных точках - то это один и тот же многочлен. Отсюда уже следует равенство скоростей и равенство расстояний от маяка до прямых-траекторий движения судов. То же самое относится и к 3-ему судну.

Итак, из пунктов 1, 5, 6 и 7 следует, что все корабли движутся с одной и той же скоростью и все траектории движения находятся на одном и том же расстоянии от маяка, т.е. в любой момент времени расстояния от маяка до всех кораблей будут одинаковыми (а не только в указанные в условии).

Тогда корабль A находился ближе всего к маяку именно в тот момент, когда и корабли B и C также находились ближе всего к маяку, т.е. события описанные в п.п. 2, 3 и 4 происходят в один и тот же момент времени. А именно, в этот момент t_0 *корабли находятся в вершиах треугольника со сторонами 30, 40 и 14, маяк - в центре окружности, описанной около* *этого треугольника. Вводим систему координат, суда A и C в момент t_0 находятся на оси OX, на одинаковом расстоянии от точки $(0,0)$, вершина B в верхней полуплоскости.*

Находим площадь $\triangle ABC$ по формуле Герона $S_\triangle = 168$.

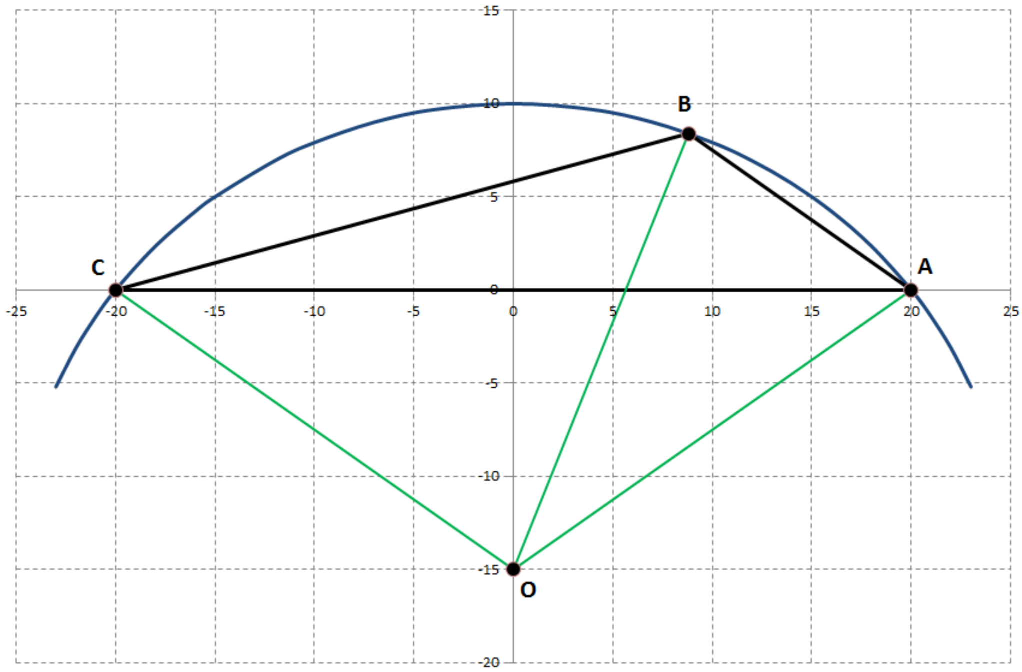
Тогда радиус описанной окружности равен

$$R = \frac{abc}{4S} = 25$$

Тогда координаты вершин $A\,(20,0)$, $C\,(-20,0)$, центр описанной окружности $O\,(0,-15)$. Координаты вершины B можно найти по разному, например, ординату так

$$y_B = \frac{2S_\triangle}{|AC|} = 8,4$$

Получаем $B\,(8,8;8,4)$.



Составим уравнения прямых:

$$OA: \qquad y = \frac{3}{4}x - 15$$

$$OB: \qquad y = \frac{117}{44}x - 15$$

$$OC: \qquad y = -\frac{3}{4}x - 15$$

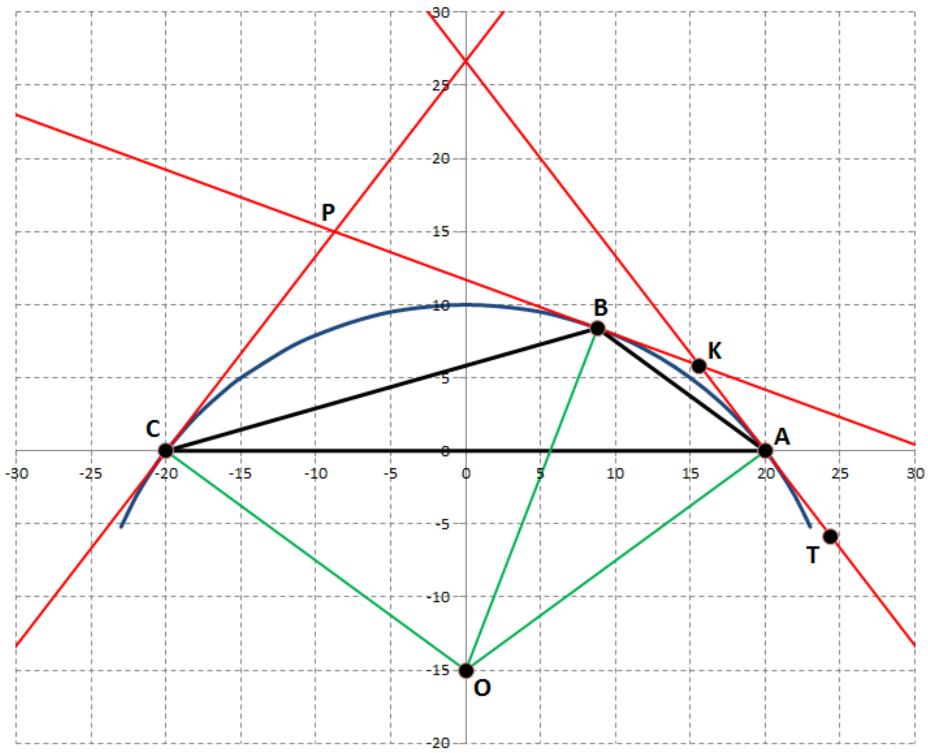
Траектории движения судов - это касательные к данной окружности, проходящие через вершины треугольника. Составляем уравнения этих прямых - они перпендикулярны к радиусам и проходят через вершины A, B и C.

$$AK: \qquad y = -\frac{4}{3}x + \frac{80}{3}$$

$$BK: \qquad y = -\frac{44}{117}x + \frac{1370}{117}$$

$$CP: \qquad y = \frac{4}{3}x + \frac{80}{3}$$

Координаты точки K - точки пересечения траекторий судов A и B: $\left(15\,\frac{5}{8}\,;\,5\,\frac{5}{6}\right)$.



В 15:00 корабль B находился в точке K, а 16:00 в этой точке был корабль A. Тогда в 15:00 корабль A находился в точке T, такой что $|OK| = |OT|$, *при этом* $|AK| = |AT|$, *следовательно,* *за один час судно A прошло $|TK| = 2|AK|$. Скорость движения судов равна:*

$$v = 2\sqrt{\left(20 - 15\frac{5}{8}\right)^2 + \left(0 - 5\frac{5}{6}\right)^2} = 2\sqrt{\frac{1225}{64} + \frac{1225}{36}} =$$

$$= 2\sqrt{\frac{30625}{576}} = \frac{175}{12} = 14\frac{7}{12} \approx 14,5833$$