ММ194.

Из n натуральных чисел, идущих подряд, выбрали 6 и разбили их на две тройки. При этом оказалось, что площади треугольников, стороны которых равны числам из этих троек, равны.

При каком наименьшем n возможна такая ситуация?

Решение.

Возьмём формулу Герона (используя периметр треугольника, а не полупериметр как обычно) и преобразуем её:

$$S_\triangle = \sqrt{\frac{P}{2}\cdot\left(\frac{P}{2}-a\right)\cdot\left(\frac{P}{2}-b\right)\cdot\left(\frac{P}{2}-c\right)} = \frac{1}{4}\sqrt{P\cdot(P-2a)\cdot(P-2b)\cdot(P-2c)}$$

Обозначим подкоренное выражение $F\,(a,b,c) = P\cdot(P-2a)\cdot(P-2b)\cdot(P-2c)$. *Если площади двух треугольников равны, то и значения введённой функции для сторон этих треугольников равны.*

Для натуральных a, b и c значение $F\,(a,b,c)$ *целочисленно. Причём значение функции той же чётности, что чётность периметра. Из шести последовательных натуральных чисел, как ни разбивай их на 2 тройки, сумма чисел в одной тройке будет чётной, а в другой - нечётной. Следовательно,* $n > 6$.

Рассмотрим 7 идущих подряд натуральных чисел, например, начиная с t. Среди них будут 4 числа одной чётности и 3 другой. 4-ка чисел - t, $t+2$, $t+4$, $t+6$. *Другую чётность имеют числа из второй группы* $t+1$, $t+3$, $t+5$. *При составлении из этих чисел 2-х троек, для обеспечения одинаковой чётности сумм чисел, в эти тройки должны попасть все 4 числа из первой группы и 2 из трёх чисел из второй группы.*

Положим $a = t+t_1$, $a = t+t_2$, $a = t+t_3$ *и подставим в функцию F:*

$$F = P\cdot(P-2a)\cdot(P-2b)\cdot(P-2c) = (a+b+c)\cdot(a+b-c)\cdot(a-b+c)\cdot(-a+b+c) =$$

$$= \left((a+b)^2-c^2\right)\cdot\left(c^2-(a-b)^2\right) =$$

$$= \left((2t+t_1+t_2)^2-(t+t_3)^2\right)\cdot\left((t+t_3)^2-(t_2-t_3)^2\right) =$$

$$= 3t^4 + 4\left(t_1+t_2+t_3\right)t^3 + \left[\left(8\left(t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3\right) - 2\left(t_1^2+t_2^2+t_3^2\right)\right)\right]t^2 +$$
$$+\left[\left(4\left(t_1^2t_2+t_1t_2^2+t_1^2t_3+t_1t_3^2+t_2^2t_3+t_2t_3^2\right) - 4\left(t_1^3+t_2^3+t_3^3\right)\right)\right]t +$$
$$+\left[\left(2\left(t_1^2t_2^2+t_1^2t_3^2+t_2^2t_3^2\right) - \left(t_1^4+t_2^4+t_3^4\right)\right)\right]$$

Все коэффициенты многочлена - сами довольно симпатичные симметрические многочлены (от t_i).

Выбираем две тройки чисел $(t+t_1; t+t_2; t+t_3)$ *и* $(t+t_4; t+t_5; t+t_6)$ *и найдём* $\triangle = F(t; t_1; t_2; t_3) - F(t; t_4; t_5; t_6)$. *Эта функция равна 0 при равенстве площадей треугольников. Переберём комбинаторно все допустимые комбинации троек (всего их* 30*) и найдём положительные корни данной функции. При этом ещё необходимо выполнение неравентва треугольника для каждой тройки.*

Набор троек $(t_1; t_2; t_3) - (t_4; t_5; t_6)$*:*

1) $(0;1;3)$ - $(2;4;6)$
2) $(2;1;3)$ - $(0;4;6)$
3) $(4;1;3)$ - $(0;2;6)$
4) $(6;1;3)$ - $(0;2;4)$
5) $(0;1;5)$ - $(2;4;6)$
6) $(2;1;5)$ - $(0;4;6)$
7) $(4;1;5)$ - $(0;2;6)$
8) $(6;1;5)$ - $(0;2;4)$
9) $(0;3;5)$ - $(2;4;6)$
10) $(2;3;5)$ - $(0;4;6)$
11) $(4;3;5)$ - $(0;2;6)$
12) $(6;3;5)$ - $(0;2;4)$
13) $(0;2;1)$ - $(4;6;3)$
14) $(0;4;1)$ - $(2;6;3)$
15) $(0;6;1)$ - $(2;4;3)$
16) $(0;2;3)$ - $(4;6;1)$
17) $(0;4;3)$ - $(2;6;1)$
18) $(0;6;3)$ - $(2;4;1)$
19) $(0;2;1)$ - $(4;6;5)$
20) $(0;4;1)$ - $(2;6;5)$
21) $(0;6;1)$ - $(2;4;5)$
22) $(0;2;5)$ - $(4;6;1)$
23) $(0;4;5)$ - $(2;6;1)$
24) $(0;6;5)$ - $(2;4;1)$
25) $(0;2;3)$ - $(4;6;5)$

26) $(0;4;3)$ - $(2;6;5)$
27) $(0;6;3)$ - $(2;4;5)$
28) $(0;2;5)$ - $(4;6;3)$
29) $(0;4;5)$ - $(2;6;3)$
30) $(0;6;5)$ - $(2;4;3)$

Из этого списка виден порядок перебора и ясно, что приведены все возможные комбинации.

Перебор вариантов проведён в EXCELе, имя файла R_ 7.XLS. Выкладки проводятся на странице “Расчёт”. Вводить данные нужно в ячейки с красным фоном, на светло-коричневом фоне поясняющий текст, а на бежевом - переменные величины, расчитываемые автоматически.

Вводится номер комбинации, в результате строится график многочлена $\triangle(t)$*, на нём ищем корни многочлена, интерес представляют только положительные значения.*

Выбираем вариант 1, получаем график

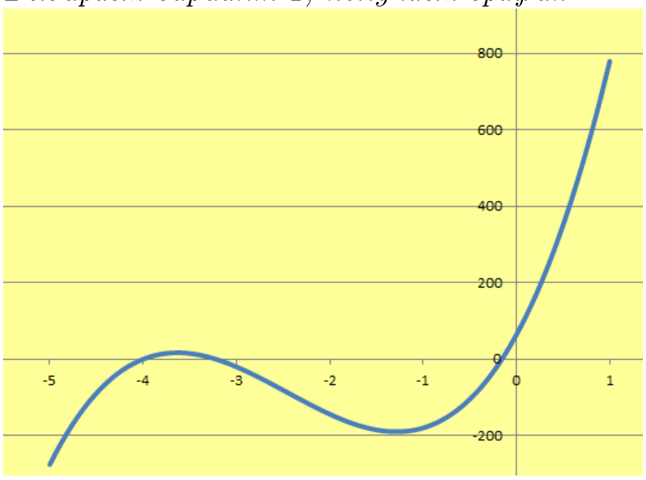
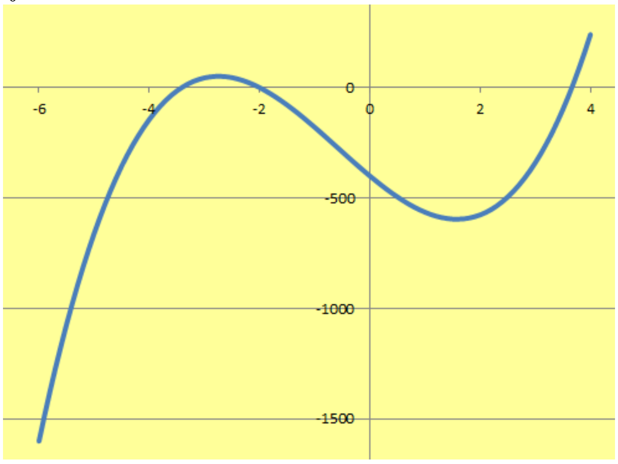


График многочлена 3-ей степени, все особые точки есть на графике, при положительных значениях x график мотонно возрастает, т.е. интересных корней нет. Далее просто перебираем номера вариантов и просматриваем графики. Для рассмотрения особых точек графика может потребоваться изменить его параметры - заполнить поля “Старт” и “Шаг” (красный фон), рядом приведены рекомендуемые к вводу значения (бежевый фон). Для справки рядом с графиком выведены тройки чисел, коэффициенты многочлена. Для 1-ого варианта получили $\triangle(t) = 32t^3 + 236t^2 + 448t + 64$.

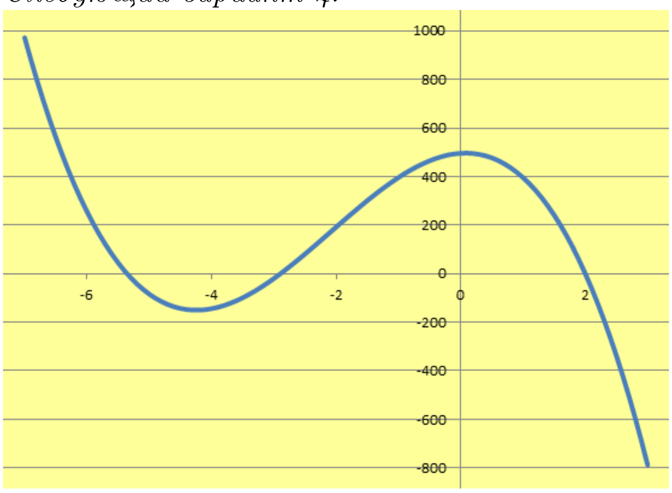
Рассмотрим вариант 2, установим рекуомендуемые параметры графика.



Многочлен имеет вид $\triangle(t) = 16t^3 + 28t^2 - 208t - 400$. У него уже есть положительный корень, судя по графику он не целый. Для проверки этого слева от графика есть блок "Контрольный расчёт". В нём одно красное поле, введём в него сначала $t = 3$, получаем $\triangle(3) = -340$, затем $t = 4$, и видим что $\triangle(4) = 240$. Таким образом, найденный корень дествительно находится между 3 и 4, но не целый, т.е. не подходит.

Проверяем вариант 3, в нём коэффициент при третьей степени равен 0, график - квадратная парабола.

Следующий вариант 4.



По графику - имеем целый положительный корень $t = 2$, проверяем его и видим, что $\triangle(2) = 0$, целый положительный *корень найден. Но ниже блока расчёта есть блок, показывающий условие для выполнения неравенства треугольника* $t > 2$. *И действительно, при* $t = 2$ *в данном случае получаем тройки* $(2+1, 2+3, 2+6) = (3,5,8)$ *и* $(2+0, 2+2, 2+4) = (2,4,6)$, *таким образом получаем пару вырожденных треугольков (площади равны 0). Решения опять нет.*

Продолжаем перебор вариатов, в 6-ом снова получим пару вырожденных троек $(3,4,7)$ *и* $(2,6,8)$. *Ещё такие же случаи в 16-ом варианте* $(1,3,4)$ *и* $(2,5,7)$, *24-ом варианте* $(1,6,7)$ *и* $(2,3,5)$, *29-ом варианте* $(1,5,6)$ *и* $(3,4,7)$

Некоторый интерес представляет 19 вариант, нет экстремумов, только точка перегиба. Ещё в варианте 23 обнуляются коэффициенты при двух старших степенях t, *график - прямая.*

Перебрав все варианты получаем, что при $n = 7$ *искомых троек чисел нет.*

Применим тот же подход для $n = 8$, t_i *могут принимать и отрицательные значения. Для одинаковой чётности сумм троек необходимо, чтобы соотношение чётных и нечётных чисел среди 6 выбранных было 0-6, 2-4, 4-2 или 6-0. Среди 8 последовательных натуральных чисел больше 4-х одной чётности не получить, поэтому обязаны быть числа* t, $t+2$, $t+4$, $t+6$, *далее, т.к.* $n = 8$, *то чётность крайних чисел разная. Тогда из 2-х чисел альтернативной чётности одно должно быть крайним, т.е. это или* $t-1$ *или* $t+7$, *но ровно одно из них. Оставшееся число выбирается из тройки* $t+1$, $t+3$, $t+5$. *Всего будет* 60 *вариантов.*

Разбор вариантов для всех комбинаций проведён в файле R_8.XLS.

Получено множество вырожденных треугольников - в вариантах 4, 5, 7, 12, 17, 18, 36 (при $t = 3$*), 41, 46, 49, 60. Ну и, наконец, получены 2 искомых треугольника. В варианте 9 при* $t = 32$ *получены 2 тройки* $(31,36,37)$ *и* $(32,34,38)$. *Площади соответствующих треугольников равны* $S = \sqrt{262080} \approx 511,9375$. *А в варианте 34 при* $t = 4$ *найдена ещё одна пара треугольников* $(4,5,6)$ *и* $(3,8,10)$. *Площади соответствующих треугольников равны* $S = \sqrt{98,4375} \approx 9,9216$. *Других таких пар троек при* $n = 8$ *не существует.*

Есть и ещё один, очень интересный случай - пара троек, соответствующая “мнимым” треугольникам. Так получается *в варианте 36 при* $t = 2$, *соответствующие тройки* $(2, 4, 7)$ *и* $(1, 6, 8)$. *Таких треугольников не существует, но при подстановке в формулу Герона, под корнем получаем равные значения* $-36, 5625$.

Теоретически можно и продолжить процесс, перебирая все возможные комбинации троек при $n = 9$ *или* $n = 10$ *и найти все такие решения. Но при* $n = 9$ *получаем* 190 *комбинаций троек чисел, а при* $n = 10$ *уже* 560.

Подводим итоги, наименьшее возможное значение n равно 8, *при этом имеем всего две пары троек:*

$$(4, 5, 6) \ - \ (3, 8, 10)$$

$$(31, 36, 37) \ - \ (32, 34, 38)$$