ММ170 (8 баллов)

Прямоугольный параллелепипед склеили из единичных некрашеных кубиков. После этого три грани параллелепипеда покрасили в красный цвет. Остальные три грани покрасили в синий, желтый и зеленый цвета (по одной в каждый цвет). Оказалось, что некрашеных кубиков в два раза больше, чем кубиков, имеющих, по крайней мере, одну красную грань. Количества кубиков, имеющих хотя бы одну синюю (желтую, зеленую) грань также являются делителями количества некрашеных кубиков. Найти объем параллелепипеда.

Решение.

Пусть рёбра прямоугольного параллелепипеда a, b, c. Некрашенных кубиков будет

$$N_H \,=\, (a-2)\,(b-2)\,(c-2) \,=\, abc - 2\,(ab+ac+bc) + 4\,(a+b+c) - 8$$

Очевидно, что $a,\, b,\, c\, \geqslant 5,$ иначе не выполнится условие - некрашеных кубиков в два раза больше, чем кубиков, имеющих, по крайней мере, одну красную грань.

Есть два случая взаимного расположения трёх граней, окрашенных в красный цвет - они или имеют общую вершину или такой вершины нет.

Рассмотрим первый случай, тогда количество кубиков, имеющих, по крайней мере, одну красную грань, равно

$$N_K \,=\, ab + a\,(c-1) + (b-1)\,(c-1) \,=\, ab + ac + bc - (a+b+c) + 1$$

Количества кубиков, имеющих хотя бы одну синюю (желтую, зеленую) равно ab, ac, bc. По условиям задачи $N_H = 2N_K$, $ab \,|\, N_H$, $ac \,|\, N_H$, $bc \,|\, N_H$.

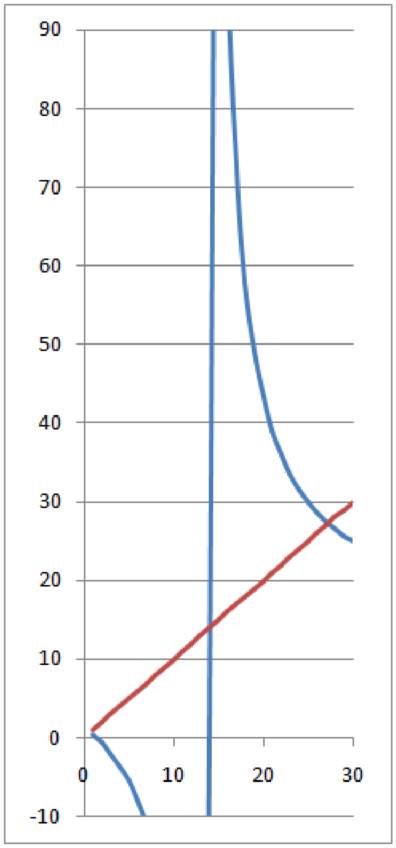
Тогда из $N_H = 2N_K$ получаем

$$abc - 4\,(ab+ac+bc) + 6\,(a+b+c) - 10 \,=\, 0$$

Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $a \geqslant b \geqslant c \geqslant 5$. Находим a :

$$a \,=\, \frac{10 - 6c + (4c-6)\,b}{6 - 4c + (c-4)\,b}$$

Считая c параметром, строим график, например, при $c = 5$:



При других значениях параметра график аналогичен, интересуют точки графика с целочисленными координатами в правой ветви выше прямой $y = x$. Достаточно проверить значения параметра до $c = 10$, т.к. при $c = b = 11$ значение $a < 10$. Проверяя значения параметра от 5 до 10 находится только 9 троек (a, b, c), это (190,15,5) , (102,16,5) , (58,18,5) , (36,22,5) , (30,25,5) , (77,10,6) , (43,11,6) , (26,13,6) , (72,8,7). Но ни для одной тройки не выполняются условия делимости. Следовательно, в случае когда три грани, окрашенные в красный цвет имеют общую вершину - решений нет.

Рассмотрим второй случай. 2 противоположные грани со сторонами a и b покрашены в красный цвет, ещё в него покрашена грань со сторонами a и c. Тогда количество кубиков, имеющих, по крайней мере, одну красную грань, равно

$$N_K = 2ab + a(c-2)$$

Из условия $N_H = 2N_K$ получаем

$$abc - 2\,(ab + ac + bc) + 4\,(a + b + c) - 8 \;=\; 4ab + 2a\,(c-2)$$

$$abc - 6ab - 4ac - 2bc + 8a + 4\,(b + c) - 8 \;=\; 0$$

Рассмотрим случай $a \geqslant b \geqslant 5$,$c \geqslant 5$. Тогда

$$a \;=\; \frac{8 - 4c + 2\,(c-2)\,b}{8 - 4c + (c-6)\,b} = 1 + \frac{(c+2)\,b}{8 - 4c + (c-6)\,b}$$

Кроме этого, должны выполняться условия делимости $ac \,|\, N_H$, $bc \,|\, N_H$. Вид графика совпадает с приведенным выше.

Другой случай $b \geqslant a \geqslant 5$,$c \geqslant 5$. Тогда

$$b \;=\; \frac{4\,(2-c) + 4\,(c-2)\,a}{4 - 2c + (c-6)\,a}$$

Кроме этого, должны выполняться условия делимости $ac \,|\, N_H$, $bc \,|\, N_H$.

Перебирая эти наборы, находим решения задачи: $(a,b,c) = (12,6,20)$ и $(a,b,c) = (8,10,12)$

Объём параллелепипеда равен 960 или 1440.