

## ПРЕЦЕССИОННАЯ ТЕОРИЯ ГИРОСКОПА

Пусть  $O$  – точка твердого тела. Предположим, что существует система координат  $Oxyz$ , в которой оператор инерции  $J_O$  имеет вид  $J_O = \text{diag}(A, A, B)$ .

Отметим, что в принятых предположениях ось  $Oz$  является осью динамической симметрии, т.е. при повороте твердого тела относительно системы  $Oxyz$  вокруг оси  $Oz$  на любой угол матрица оператора  $J_O$  остается неизменной.

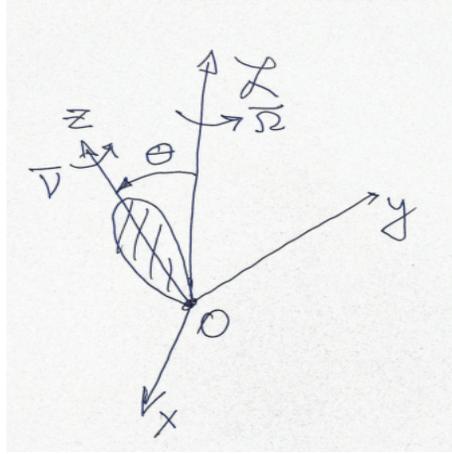


Рис. 1.

**Definition 1.** Движение твердого тела, удовлетворяющее следующим условиям, называется регулярной прецессией.

Точка  $O$  остается неподвижной относительно инерциальной системы отсчета, и

1) система  $Oxyz$  вращается относительно инерциальной системы отсчета с постоянной угловой скоростью  $\Omega$  вокруг неподвижной оси  $\mathcal{L}$ ,  $O \in \mathcal{L}$  с направляющим вектором  $e$ :

$$\Omega = \Omega e, \quad e = \cos \theta e_z + \sin \theta e_y, \quad \theta = \text{const} \in (0, \pi);$$

2) твердое тело вращается относительно системы  $Oxyz$  вокруг оси  $Oz$  с угловой скоростью  $\nu = \nu e_z$  и  $\nu$  – константа.

Угловая скорость  $\Omega$  называется скоростью прецессии, а угловая скорость  $\nu$  называется скоростью собственного вращения твердого тела.

Таким образом, угловая скорость твердого тела относительно инерциальной системы равна

$$\omega = \nu + \Omega. \tag{0.1}$$

Предположим, что система сил, приложенных к твердому телу, такова, что их момент относительно точки  $O$  равен  $M_O = M(\theta)e_x \neq 0$  и при каждом  $\theta \in (0, \pi)$  возможна регулярная прецессия<sup>1</sup>.

Через  $\frac{\delta}{\delta t}$  будем обозначать производную по времени в системе  $Oxyz$ .

Запишем теорему об изменении кинетического момента

$$\frac{d}{dt}(J_O \omega) = \frac{\delta}{\delta t}(J_O \omega) + [\Omega, J_O \omega] = M_O.$$

<sup>1</sup>Ниже мы используем только теорему об изменении кинетического момента, но, разумеется, регулярная прецессия должна удовлетворять и теореме о движении центра масс твердого тела.

В силу симметрии,  $J_O$  не меняется в системе  $Oxyz$ , поэтому

$$\frac{\delta}{\delta t}(J_O \boldsymbol{\omega}) = 0.$$

Теорема об изменении кинетического момента приобретает вид

$$[\boldsymbol{\Omega}, J_O \boldsymbol{\omega}] = \mathbf{M}_O; \quad (0.2)$$

или в координатах

$$B\nu\Omega \sin \theta + \Omega^2(B - A) \sin \theta \cos \theta = M(\theta). \quad (0.3)$$

**Definition 2.** *Твердое тело называется быстро запущенным волчком, или гироскопом, если оно совершает регулярную прецессию так, что*

$$\nu = \frac{\Omega \cdot \text{sign } M(\theta)}{\varepsilon},$$

где  $\varepsilon > 0$  – малый параметр.

В этом случае из (0.3) находим

$$|\Omega| = \sqrt{\frac{|M(\theta)|\varepsilon}{B \sin \theta}} \cdot (1 + O(\varepsilon)),$$

и соответственно

$$|\nu| = \sqrt{\frac{|M(\theta)|}{\varepsilon B \sin \theta}} \cdot (1 + O(\varepsilon)).$$

С учетом этих формул, из (0.1), (0.2), получаем правило Жуковского:

$$[\boldsymbol{\Omega}, B\nu] + O(\varepsilon) = \mathbf{M}_O,$$

или

$$B\Omega\nu \sin \theta + O(\varepsilon) = M(\theta).$$

Все формулы остаются верными, если точку  $O$  заменить на центр масс, а вместо инерциальной системы отсчета использовать оси Кенига.