

О. Б. Полубасов 11.11.2012 г.

ММ170 (8 баллов)

Решения принимаются, по крайней мере, до 11.11.12

Прямоугольный параллелепипед склеили из единичных некрашенных кубиков. После этого три грани параллелепипеда покрасили в красный цвет. Остальные три грани покрасили в синий, желтый и зеленый цвета (по одной в каждый цвет).

Оказалось, что некрашенных кубиков в два раза больше, чем кубиков, имеющих, по крайней мере, одну красную грань.

Количества кубиков, имеющих хотя бы одну синюю (желтую, зеленую) грань также являются делителями количества некрашенных кубиков.

Найти объем параллелепипеда.

=====

Пусть размеры параллелепипеда  $(y, x, z)$ , тогда число некрашенных кубиков  $N_0 = (x-2)*(y-2)*(z-2)$ .

**Так как возможны два способа выбора красных граней, то сначала рассмотрим первый из них.**

Покрасим в красный цвет две противоположные грани  $(x = \text{Const})$  и одну  $(y = \text{Const})$ , для определённости, верхнюю.

Число красных кубиков  $N_R = xz + 2yz - 2z = z(x + 2y - 2)$ , число зелёных  $N_G = xz$ , число синих  $N_B = xy$ .

По условию,  $(x-2)(y-2)(z-2) = 2z(x + 2y - 2) = axz = bxy$ .

Тогда  $2x + 4y - 4 = ax$ ,  $4(y - 1) = (a - 2)x$ ,  $a \geq 3$ .

Введём обозначение:  $d = a - 2 \geq 1$ . Тогда  $y = dx/4 + 1$ .

$$0 = N_0 - 2N_R = z(xy - 2x - 2y + 4 - 4y - 2x + 4) - 2(x - 2)(y - 2) \\ = z(xy - 4x - 6y + 8) - 2(x-2)(y-2).$$

$$z(xy - 4x - 6y + 8) = 2(x - 2)(y - 2). \\ z(x-6)(y-4) - 16z = 2(x - 2)(y - 2) > 0. \\ (x - 6)(y - 4) > 16. \\ \Rightarrow x \geq 7, y \geq 5.$$

$$0 = 4(N_0 - 2N_R) = 4y(xz - 2x - 6z + 4) - 16(xz - x - 2z + 2) \\ = (dx + 4)(xz - 2x - 6z + 4) - 16(xz - x - 2z + 2) \\ = (dz - 2)x^2 - 2((3d+6)z + (2d+4))x + (8z - 16).$$

Для нескольких малых конкретных значений  $d$  решим квадратное уравнение и выразим пределы изменения  $x$ , учитывая, что  $z \geq 3$ .

Затем для каждого  $x$  в найденных пределах найдём  $y = dx/4 + 1$ ,  
 $z = 2(x - 2)(y - 2)/(xy - 4x - 6y + 8)$   
и  $b = N_0/N_B$ , проверяя при этом, что они натуральные.

**Пусть  $d = 1$ .**

$$(z-2)x^2 - 2(9z+6)x - (8z-16) = 0.$$

$$D/4 = (9z+6)^2 - (z-2)(8z-16) = 81z^2 + 108z + 36 + 8z^2 - 32z - 32 = 89z^2 + 140z + 68.$$

$$D/4 > 81z^2 + 126z + 49 = (9z+7)^2.$$

$$D/4 < 100z^2 + 140z + 49 = (10z+7)^2.$$

$$x > ((9z+6) + (9z+7))/(z-2) = (18z+13)/(z-2) = 18 + 49/(z-2) > 18.$$

$$x < ((9z+6) + (10z+7))/(z-2) = (19z+13)/(z-2) = 19 + 51/(z-2) < 70.$$

x	y	z	$N_0$	$N_B$	b	V
20	6	12	720	120	6	1440
24	7	5.79				
28	8	4.33				
32	9	3.68				
36	10	3.32				
40	11	3.08				
44	12	2.92				
48	13	2.80				
52	14	2.70				
56	15	2.63				
60	16	2.57				
64	17	2.52				
68	18	2.48				

**Пусть  $d = 2$ .**

$$(2z-2)x^2 - 2(12z+8)x - (8z-16) = 0.$$

$$D/4 = (12z+8)^2 - (2z-2)(8z-16) = 144z^2 + 192z + 64 + 16z^2 - 48z - 32 = 160z^2 + 240z + 96.$$

$$D/4 > 144z^2 + 240z + 100 = (12z+10)^2.$$

$$D/4 < 169z^2 + 260z + 100 = (13z+10)^2.$$

$$x > ((12z+8) + (12z+10))/(2z-2) = (24z+18)/(2z-2) = 12 + 42/(2z-2) > 12.$$

$$x < ((12z+8) + (13z+10))/(2z-2) = (25z+18)/(2z-2) = 12 + (z+42)/(2z-2) < 24.$$

x	y	z	$N_0$	$N_B$	b	V
14	8	9	504	112	4.50	
16	9	5.76				
18	10	4.57				
20	11	3.95				
22	12	3.57				

**Пусть  $d = 3$ .**

$$(3z-2)x^2 - 2(15z+10)x - (8z-16) = 0.$$

$$D/4 = (15z+10)^2 - (3z-2)(8z-16) = 225z^2 + 300z + 100 + 24z^2 - 64z - 32 = 249z^2 + 364z + 132.$$

$$D/4 > 225z^2 + 360z + 144 = (15z+12)^2.$$

$$D/4 < 256z^2 + 384z + 144 = (16z+12)^2.$$

$$x > ((15z+10) + (15z+12))/(3z-2) = (30z+22)/(3z-2) = 10 + 42/(3z-2) > 10.$$

$$x < ((15z+10) + (16z+12))/(3z-2) = (31z+22)/(3z-2) = 10 + (z+42)/(3z-2) < 17.$$

x	y	z	N <sub>0</sub>	N <sub>B</sub>	b	V
12	10	8	480	120	4	960
16	13	4.16				

**Пусть d = 4.**

$$(4z-2)x^2 - 2(18z+12)x - (8z-16) = 0.$$

$$D/4 = (18z+12)^2 - (4z-2)(8z-16) = 324z^2 + 432z + 144 + 32z^2 - 80z - 32 = 356z^2 + 512z + 176.$$

$$D/4 > 324z^2 + 504z + 196 = (18z+14)^2.$$

$$D/4 < 361z^2 + 532z + 196 = (19z+14)^2.$$

$$x > ((18z+12) + (18z+14))/(4z-2) = (36z+26)/(4z-2) = 9 + 44/(4z-2) > 9.$$

$$x < ((18z+12) + (19z+14))/(4z-2) = (37z+26)/(4z-2) = 9 + (z+44)/(4z-2) < 14.$$

x	y	z	N <sub>0</sub>	N <sub>B</sub>	b	V
10	11	12	720	110	6.55	
11	12	7.50				
12	13	5.79				
13	14	4.89				

**Пусть d = 5.**

$$(5z-2)x^2 - 2(21z+14)x - (8z-16) = 0.$$

$$D/4 = (21z+14)^2 - (5z-2)(8z-16) = 441z^2 + 588z + 196 + 40z^2 - 96z - 32 = 481z^2 + 684z + 228.$$

$$D/4 > 441z^2 + 672z + 256 = (21z+16)^2.$$

$$D/4 < 484z^2 + 704z + 256 = (22z+16)^2.$$

$$x > ((21z+14) + (21z+16))/(5z-2) = (42z+30)/(5z-2) = 8 + (2z+46)/(5z-2) > 8.$$

$$x < ((21z+14) + (22z+16))/(5z-2) = (43z+30)/(5z-2) = 8 + (3z+46)/(5z-2) < 13.$$

x	y	z	N <sub>0</sub>	N <sub>B</sub>	b	V
12	16	5	420	192	2.19	

**Пусть d = 6.**

$$(6z-2)x^2 - 2(24z+16)x - (8z-16) = 0.$$

$$D/4 = (24z+16)^2 - (6z-2)(8z-16) = 576z^2 + 768z + 256 + 48z^2 - 112z - 32 = 624z^2 + 880z + 288.$$

$$D/4 > 576z^2 + 864z + 324 = (24z+18)^2.$$

$$D/4 < 625z^2 + 900z + 324 = (25z+18)^2.$$

$$x > ((24z+16) + (24z+18))/(6z-2) = (48z+34)/(6z-2) = 8 + 50/(6z-2) > 8.$$

$$x < ((24z+16) + (25z+18))/(6z-2) = (49z+34)/(6z-2) = 8 + (z+50)/(6z-2) < 12.$$

x	y	z	N <sub>0</sub>	N <sub>B</sub>	b	V
10	16	7	560	160	3.50	

**Пусть d = 7.**

$$(7z-2)x^2 - 2(27z+18)x - (8z-16) = 0.$$

$$D/4 = (27z+18)^2 - (7z-2)(8z-16) = 729z^2 + 972z + 324 + 56z^2 - 128z - 32 = 785z^2 + 1100z + 356.$$

$$D/4 > 784z^2 + 1064z + 361 = (28z+19)^2.$$

$$D/4 < 841z^2 + 1102z + 361 = (29z+19)^2.$$

$$x > ((27z+18) + (28z+19))/(7z-2) = (55z+37)/(7z-2) = 7 + (6z+51)/(7z-2) > 7.$$

$$x < ((27z+18) + (29z+19))/(7z-2) = (56z+37)/(7z-2) = 8 + 53/(7z-2) < 11.$$

x	y	z	N <sub>0</sub>	N <sub>B</sub>	b	V
8	15	26	1872	120	15.60	

**Пусть d = 8.**

$$(8z-2)x^2 - 2(30z+20)x - (8z-16) = 0.$$

$$D/4 = (30z+20)^2 - (8z-2)(8z-16) = 900z^2 + 1200z + 400 + 64z^2 - 144z - 32 = 964z^2 + 1344z + 432.$$

$$D/4 > 961z^2 + 1302z + 441 = (31z+21)^2.$$

$$D/4 < 1024z^2 + 1344z + 441 = (32z+21)^2.$$

$$x > ((30z+20) + (31z+21))/(8z-2) = (61z+41)/(8z-2) = 7 + (5z+55)/(8z-2) > 7.$$

$$x < ((30z+20) + (32z+21))/(8z-2) = (62z+41)/(8z-2) = 7 + (6z+55)/(8z-2) <$$

11.

x	y	z	N <sub>0</sub>	N <sub>B</sub>	b	V
8	17	18	1440	136	10.59	
9	19	8.21				
10	21	5.85				

**Пусть d = 9.**

$$(9z-2)x^2 - 2(33z+22)x - (8z-16) = 0.$$

$$D/4 = (33z+22)^2 - (9z-2)(8z-16) = 1089z^2 + 1452z + 484 + 72z^2 - 160z - 32 = 1161z^2 + 1612z + 516.$$

$$D/4 > 1156z^2 + 1564z + 529 = (34z+23)^2.$$

$$D/4 < 1225z^2 + 1680z + 576 = (35z+24)^2.$$

$$x > ((33z+22) + (34z+23))/(9z-2) = (67z+45)/(9z-2) = 7 + (4z+59)/(9z-2) > 7.$$

$$x < ((33z+22) + (35z+24))/(9z-2) = (68z+46)/(9z-2) = 7 + (5z+60)/(9z-2) < 10.$$

x	y	z	N <sub>0</sub>	N <sub>B</sub>	b	V
8	19	14.57				

**Пусть d = 10.**

$$(10z-2)x^2 - 2(36z+24)x - (8z-16) = 0.$$

$$D/4 = (36z+24)^2 - (10z-2)(8z-16) = 1296z^2 + 1728z + 576 + 80z^2 - 176z - 32 = 1376z^2 + 1904z + 608.$$

$$D/4 > 1369z^2 + 1850z + 625 = (37z+25)^2.$$

$$D/4 < 1444z^2 + 1976z + 676 = (38z+26)^2.$$

$$x > ((36z+24) + (37z+25))/(10z-2) = (73z+49)/(10z-2) = 7 + (3z+63)/(10z-2) > 7.$$

$$x < ((36z+24) + (38z+26))/(10z-2) = (74z+50)/(10z-2) = 7 + (4z+64)/(10z-2) < 10.$$

x	y	z	N <sub>0</sub>	N <sub>B</sub>	b	V
8	21	12.67				

**Пусть d = 11.**

$$(11z-2)x^2 - 2(39z+26)x - (8z-16) = 0.$$

$$D/4 = (39z+26)^2 - (11z-2)(8z-16) = 1521z^2 + 2028z + 676 + 88z^2 - 192z - 32 = 1609z^2 + 2220z + 708.$$

$$D/4 > 1600z^2 + 2160z + 729 = (40z+27)^2.$$

$$D/4 < 1681z^2 + 2296z + 784 = (41z+28)^2.$$

$$x > ((39z+26) + (40z+27))/(11z-2) = (79z+53)/(11z-2) = 7 + (2z+67)/(11z-2) > 7.$$

$$x < ((39z+26) + (41z+28))/(11z-2) = (80z+54)/(11z-2) = 7 + (3z+68)/(11z-2) < 10.$$

x	y	z	N <sub>0</sub>	N <sub>B</sub>	b	V
8	23	12.45				

**Пусть d = 12.**

$$(12z-2)x^2 - 2(42z+28)x - (8z-16) = 0.$$

$$D/4 = (42z+28)^2 - (12z-2)(8z-16) = 1764z^2 + 2352z + 784 + 96z^2 - 208z - 32 = 1860z^2 + 2560z + 816.$$

$$D/4 > 1849z^2 + 2494z + 841 = (43z+29)^2.$$

$$D/4 < 1936z^2 + 2640z + 900 = (44z+30)^2.$$

$$x > ((42z+28) + (43z+29))/(12z-2) = (85z+57)/(12z-2) = 7 + (z+71)/(12z-2) > 7.$$

$$x < ((42z+28) + (44z+30))/(12z-2) = (86z+58)/(12z-2) = 7 + (2z+72)/(12z-2) < 10.$$

x	y	z	N <sub>0</sub>	N <sub>B</sub>	b	V
8	25	10.62				
9	28	6.50				

**Пусть d = 13.**

$$(13z-2)x^2 - 2(45z+30)x - (8z-16) = 0.$$

$$D/4 = (45z+30)^2 - (13z-2)(8z-16) = 2025z^2 + 2700z + 900 + 104z^2 - 224z - 32 = 2129z^2 + 2924z + 932.$$

$$D/4 > 2116z^2 + 2852z + 961 = (46z+31)^2.$$

$$D/4 < 2209z^2 + 3008z + 1024 = (47z+32)^2.$$

$$x > ((45z+30) + (46z+31))/(13z-2) = (91z+61)/(13z-2) = 7 + 75/(13z-2) > 7.$$

$$x < ((45z+30) + (47z+32))/(13z-2) = (92z+62)/(13z-2) = 7 + (z+76)/(13z-2) < 10.$$

x	y	z	N <sub>0</sub>	N <sub>B</sub>	b	V
8	27	10	1200	216	5.56	

**Пусть d = 14.**

$$(14z-2)x^2 - 2(48z+32)x - (8z-16) = 0.$$

$$D/4 = (48z+32)^2 - (14z-2)(8z-16) = 2304z^2 + 3072z + 1024 + 112z^2 - 240z - 32 = 2416z^2 + 3312z + 1056.$$

$$D/4 > 2401z^2 + 3234z + 1089 = (49z+33)^2.$$

$$D/4 < 2500z^2 + 3400z + 1156 = (50z+34)^2.$$

$$x > ((48z+32) + (49z+33))/(14z-2) = (97z+65)/(14z-2) = 6 + (13z+77)/(14z-2) > 6.$$

$$x < ((48z+32) + (50z+34))/(14z-2) = (98z+66)/(14z-2) = 7 + 80/(14z-2) < 9.$$

x	y	z	N <sub>0</sub>	N <sub>B</sub>	b	V
8	29	9.53				

При дальнейшем возрастании d верхняя граница возможных значений x продолжает уменьшаться, при этом оставаясь больше 7, поэтому наличие решений при x = 7 и x = 8 следует проверить отдельно, другим способом. Для этого найдём натуральные решения уравнения:  $N_0 - 2N_R = 0$ .

$$N_0 - 2N_R = z(xy - 4x - 6y + 8) - 2(xy - 2x - 2y + 4) \\ = z((x - 6)y - 4(x - 2)) - 2((x - 2)y - 2(x - 2)).$$

### Поиск решений для $x = 7, d > 14$

$$N_0 - 2N_R = z(y - 20) - 2(5y - 10) = zy - 20z - 10y + 20 = 0, \\ \Rightarrow (y - 20)(z - 10) = 180.$$

Найдём все разложения числа  $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$  в произведение двух натуральных чисел  $r$  и  $s$  и проверим, дают ли полученные  $y = r + 20$  и  $z = s + 10$  решение исходной задачи. В частности,  $d = 4(y - 1)/7$  должно быть целым и превышать 14.

r	y	d	s	z	N <sub>0</sub>	N <sub>R</sub>	N <sub>G</sub>	N <sub>B</sub>	b	V
1	21	11.43								
2	22	12.00								
3	23	12.57								
4	24	13.14								
5	25	13.71								
6	26	14.29								
9	29	16.00	20	30	3780	1890	210	203	18.62	
10	30	16.57								
12	32	17.71								
15	35	19.43								
18	38	21.14								
20	40	22.29								
30	50	28.00	6	16	3360	1680	112	350	9.60	
36	56	31.43								
45	65	36.57								
60	80	45.14								
90	110	62.29								
180	200	113.71								

Подходящих решений нет.

### Поиск решений для $x = 8, d > 14$

$$N_0 - 2N_R = z(2y - 24) - 2(6y - 12) = 2zy - 24z - 12y + 24 = 0, \\ \Rightarrow (y - 12)(z - 6) = 60.$$

Найдём все разложения числа  $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$  в произведение двух натуральных чисел  $r$  и  $s$  и проверим, дают ли полученные  $y = r + 12$  и  $z = s + 6$  решение исходной задачи. В частности,  $d = 4(y - 1)/8 = (y - 1)/2$  должно быть целым и превышать 14.

r	y	d	s	z	N <sub>0</sub>	N <sub>R</sub>	N <sub>G</sub>	N <sub>B</sub>	b	V
1	13	6.0								
2	14	6.5								
3	15	7.0								
4	16	7.5								
5	17	8.0								
6	18	8.5								
10	22	10.5								
12	24	11.5								
15	27	13.0								
20	32	15.5								
30	42	20.5								
60	72	35.5								

Подходящих решений нет.

Итого, первый способ выбора красных граней принёс два решения.

**Теперь рассмотрим второй способ выбора красных граней.**

Покрасим в красный цвет три смежные грани.

Число некрашенных кубиков:

$$N_0 = (x-2)*(y-2)*(z-2) = xyz - 2(xy + xz + yz) + 4(x+y+z) - 8.$$

$$\text{Число красных кубиков: } N_R = (xy + xz + yz) - (x+y+z) + 1.$$

$$N_0 + 2N_R = 2N_0 = xyz + 2(x+y+z) - 6.$$

Так как  $xyz$ , очевидно, делится на  $xy$ ,  $xz$  и  $yz$ , то для того, чтобы на эти числа делилось число некрашенных кубиков, необходимо (но не достаточно), чтобы на эти числа делилось выражение  $2(x+y+z) - 6$ .

Пусть  $3 \leq x \leq y \leq z$ . При  $z \geq 7$  выражение  $2(x+y+z) - 6$  меньше чем  $yz$  и поэтому на него не делится. Прямоугольники, у которых все размеры не превышают 6, нетрудно проверить вручную. Таким образом, второй способ выбора красных граней не имеет решений.

**Ответ.** Существуют два решения:  $960 = 12 \times 10 \times 8$  и  $1440 = 20 \times 6 \times 12$ .