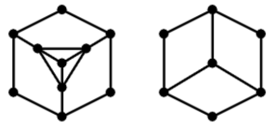
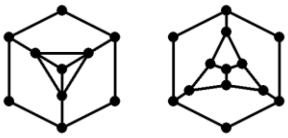
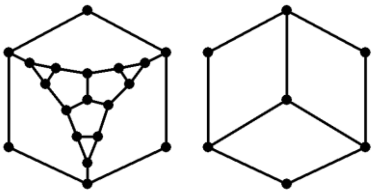
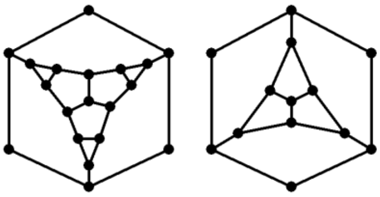
Шамсутдинов Константин

MM280

Ответ: возможны 6 векторов граней:

№	Вектор граней	Передняя и обратная сторона каркаса многогранника
1	[3,3,3]	
2	[3,0,3,3]	
3	[3,3,3,3]	
4	[3,3,0,3,3]	
5	[3,3,3,0,0,3]	
6	[3,3,3,3,0,3]	

Пусть:

f, e, v – количество граней, ребер и вершин многогранника,

f_i – количество i-угольных граней (0 или 3),

a_i – наличие i-угольных граней (0 или 1),

n_k – количество вершин степени k,

$d = \sum(n_k - 3) = n_4 + 2\,n_5 + 3n_6 + \cdots$.

Из следующих исходных формул:

$e + 2 = v + f$ (формула Эйлера для выпуклого многогранника),

$f_i = 3a_i$,

$f = \sum f_i$,

$v = \sum n_k$,

$2e = \sum if_i = \sum kn_k$.

выводим:

1) $a_3 + a_5 + a_7 + \cdots \vdots\, 2$ (сумма по нечетным индексам),

2) $3a_3 + 2a_4 + a_5 = \frac{2}{3}d + 4 + a_7 + 2a_8 + 3a_9 + \cdots$,

3) $v = \sum i a_i - \frac{d}{3}$.

Из формул 1) и 2) следует, что кроме следующих 8 случаев, другие невозможны:

№	вектор граней	d	v	№ решения
1	[3,0,3]	0	8	нет решения
2	[3,0,3,3]	0	14	2
3	[3,3,3]	3	11	1
4	[3,3,3,3]	3	17	3
5	[3,3,0,0,3]	0	14	нет решения
6	[3,3,0,3,3]	0	20	4
7	[3,3,3,0,0,3]	0	20	5
8	[3,3,3,3,0,3]	0	26	6

Докажем, что случаи 1 и 5 также невозможны (для оставшихся приведены примеры).

Пусть u – максимальное количество вершин в грани. Тогда среди всех вершин на 3 гранях с этим максимальным количеством будет не менее $3u - 6$ различных вершин. Это следует из того, что две грани не могут иметь более 2 общих вершин. Поэтому должно выполняться $v \geq 3u - 6$ (*), что не так для случаев 1: $u = 5, v = 8$ и 5: $u = 7, v = 14$. (Заметим, что формула (*) в общем случае выпуклого многогранника для n граней с наибольшими количествами сторон e_i выглядит: $v \geq \sum e_i - n(n-1)$).

Оценка задачи: 5.