MM279

Новые пятиугольные числа

Существует ли выпуклый многогранник, все f граней которого являются пятиугольниками, если

а) f = 2022;

б) f = 2023;

в) f = 2024?

Давайте решим более общую задачу, и докажем, что, если в выпуклом многограннике все «F» грани многоугольники с одинаковым количеством углов, то гранями не могут быть многоугольники с количеством углов больше 5, и для каждого перечислим все значения «F» для которых существует такой многогранник.

1) **Тогда и только тогда, когда F=12 и F=2n≥16 $\{\{F=12\} \cup \{F \geq 16\} \mid (F/2) \in \mathbb{N}\}$ существует выпуклый многогранник у которого все «F» грани пятиугольники**
2) **Тогда и только тогда, когда F=2n≥4 $\{F \geq 4 \mid (F/2) \in \mathbb{N}\}$ существует выпуклый многогранник у которого все «F» грани треугольники**
3) **Тогда и только тогда, когда F=6 и F≥8 $\{(F=6) \cup \{F \geq 8\} \mid F \in \mathbb{N}\}$ существует выпуклый многогранник у которого все «F» грани четырёхугольники**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

F – Количество грань выпуклого многогранника

E – Количество рёбер выпуклого многогранника

V – Количество вершин выпуклого многогранника

S – Суммарная степень всех вершин выпуклого многогранника

m – Количество углов многоугольника

E=m*F/2; S=2E; V=E+2-F=m*F/2+2-F;

(S-3V)=m*F-3*(m*F/2+2-F)=3F-m*F/2-6=(6-m)*F/2-6

$0 \leq (S-3V)=(6-m)*F/2-6 \Longrightarrow m<6$

То есть доказали, что, если в выпуклом многограннике все грани многоугольники с одинаковым количеством углов, то количество углов многоугольника не может быть больше 5.

ВСЕ ГРАНИ ПЯТИУГОЛЬНЫЕ

$E=5F/2 \longrightarrow (F/2)\in\mathbb{N} \longrightarrow$ Выпуклый многогранник, у которого все грани пятиугольники, имеет чётное количество грань

$S-3V=2E-3V=5F-3(3F/2+2)=F/2-6\geq 0 \longrightarrow$ В выпуклом многограннике, в котором все грани пятиугольники, количество грань не может быть меньше 12

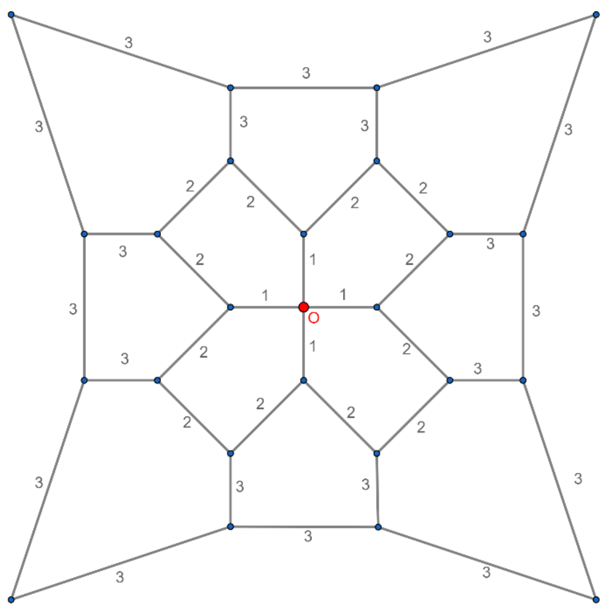
А теперь докажем, что, для $F=14$ не существует выпуклого многогранника, у которого все «F» грани пятиугольники

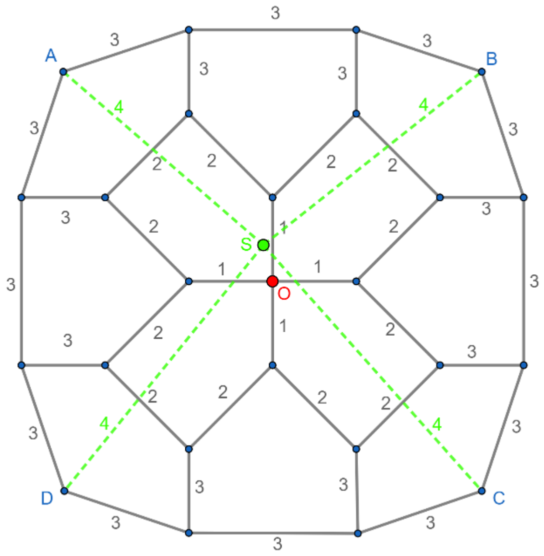
$F=14 \longrightarrow E=5F/2=35$; $V=E+2-F=23$; $S=2E=70$; $S-3V=70-3*23=1$

Так как для $F=14$ получили что $(S-3V)=1$, значит если такой многогранник существует, то в нём одна вершина должна иметь четвёртую степень, а все остальные вершины должны иметь степень 3.

И если начнём построение с вершины со степенью 4, так как все остальные вершины должны иметь степень 3 и каждая грань должен быть пятиугольником в выпуклом многограннике, то каждый «шаг» построения будет единственным, и как показано на рисунке снизу, уже на третьем «шаге» построения, количество рёбер переваливает за 35 (количество рёбер у такого типа многогранника, для $F=14 \longrightarrow E=35$) а многогранник всё ещё не собран, и с минимальным количеством грань многогранник у которого все грани пятиугольники и хотя бы одна вершина четвёртой степени, как видно на втором рисунке, можно получить 16-гранник, у которого вместо одной вершины четвёртой степени имеется две вершины четвёртой степени, на втором рисунке четвёртую степень имеют вершина «O» и вершина «S».

На рисунках, цифрами у рёбер указаны «номер шага построении»





То есть, доказали, что, выпуклый многогранник у которого все грани пятиугольники и F=14 не существует.

Дальше, по умолчанию будем пользоваться следующим утверждением:

Если в двух, вершинно 3-связных плоских графах, имеется хотя бы по одной грани с одинаковым количеством вершин, то мы всегда сможем, одного из этих двух графов изоморфно преобразовать в плоский граф так, чтобы этот грань оказался внутренним, а второго так, чтобы наоборот этот грань оказался его «внешним граном», и в точности был идентичен соответствующей внутренней грани первого плоского графа, и «вставляя» второй граф на месте этой грани первого графа, так как обе графи были вершинно 3-связные плоские графи, мы получим «объединение» этих двух графов в третий вершинно 3-связный плоский граф, в котором будут все грани первых двух, кроме тех двух одинаковых грань.

И так как, любому вершинно 3-связному плоскому графу соответствует каркас выпуклого многогранника, то получаем что, с помощью изоморфных преобразовании, если на каждом «шаге объединения двух многогранников», в соответствующих двух многогранниках находится грань с одинаковым количеством углов, мы сможем «пошагово» «объединить» любое количество выпуклых многогранников, и в конечном «объединённом выпуклом многограннике», количество грань получим:

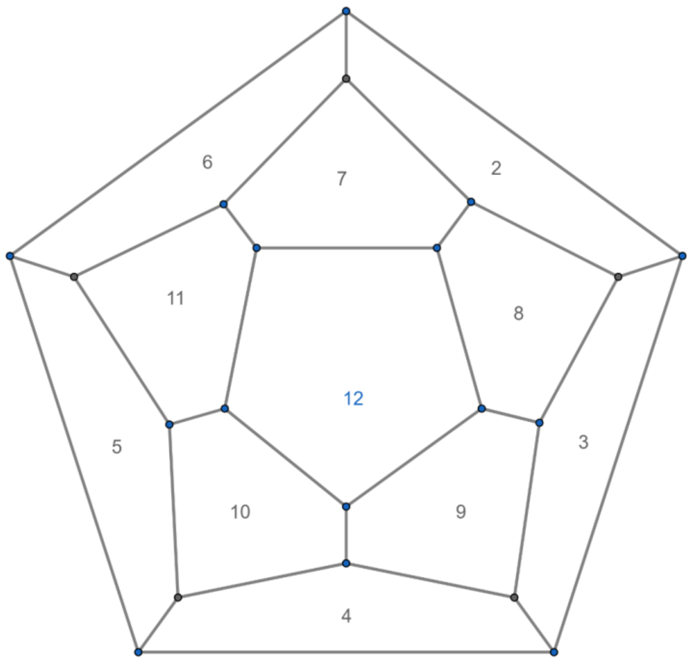
F=2*(1-n)+∑{i=1..n}{F_i} (где «n» количество объединённых выпуклых многогранников, а «F_i» количество грань в многограннике номером «i»)

И так как, ƒ=(12, 16, 18, 20, 24) содержит все значения (2n mod 10) (0,2,4,6,8), то для F=22 и для любого F=2n>24 среди пять чисел ƒ=(12, 16, 18, 20, 24), однозначно найдётся такой «ƒ», чтобы выполнялся ((F-ƒ)/10)∈ℕ, и если мы покажем для ƒ=(12, 16, 18, 20, 24) выпуклых многогранников у которых все «ƒ» грани пятиугольники, то мы для F=22 и для любого F=2n>24 сможем доказать существования выпуклого многогранника у которого все грани пятиугольники, так как, на месте одной пятиугольной грани «вставляя» 12-гранник, мы этим к общему количеству граней добавляем ровно 10 пятиугольников, и если уже к показанному соответствующему «ƒ-граннику» (из продемонстрированных ƒ=(12,16,18,20,24), тот который соответствует тому «F» для которого доказываем, то есть тот «ƒ» у которого (mod 10) совпадает с «F») «добавим» ((F-ƒ)/10) раз 12-гранник, то общее количество граней увеличится ровно на 10*((F-ƒ)/10), и получим выпуклый многогранник, у которого количество грань будет: ƒ+10*((F-ƒ)/10)=F; и этим доказывается что, если для ƒ=(12, 16, 18, 20, 24), существуют выпуклые многогранники у которых все «ƒ» грани пятиугольники, то и для F=22 и для любого F=2n>24 существуют выпуклые многогранники у которых все грани пятиугольники.

А теперь, для F=(12,16,18,80,24) продемонстрируем выпуклых многогранников, у которых все «F» грани являются пятиугольниками.

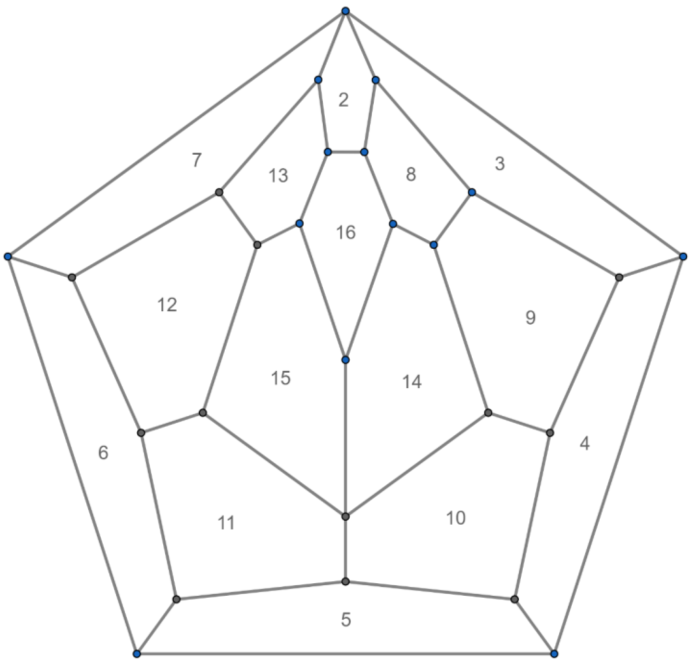
1) F=12

E=30; V=20; S=60; (S-3V)=0



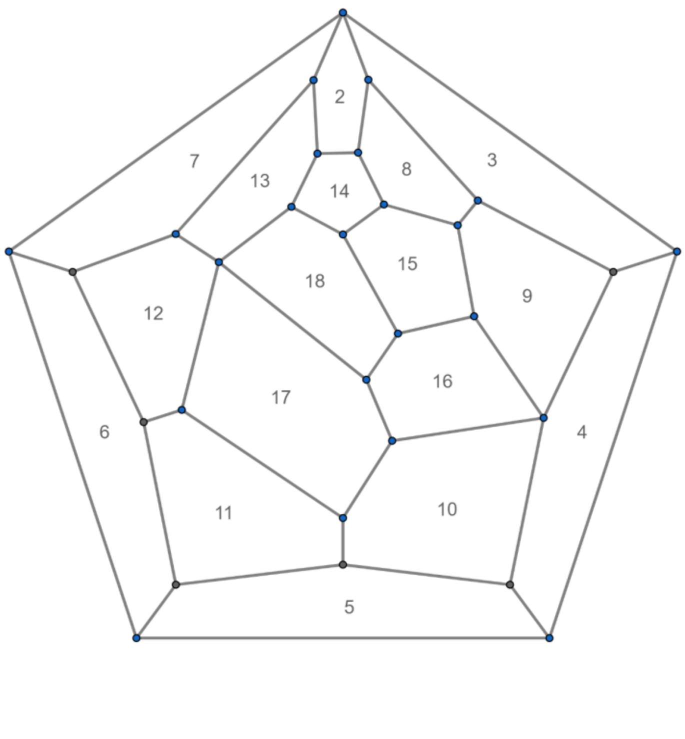
2) F=16

E=40; V=26; S=80; (S-3V)=2



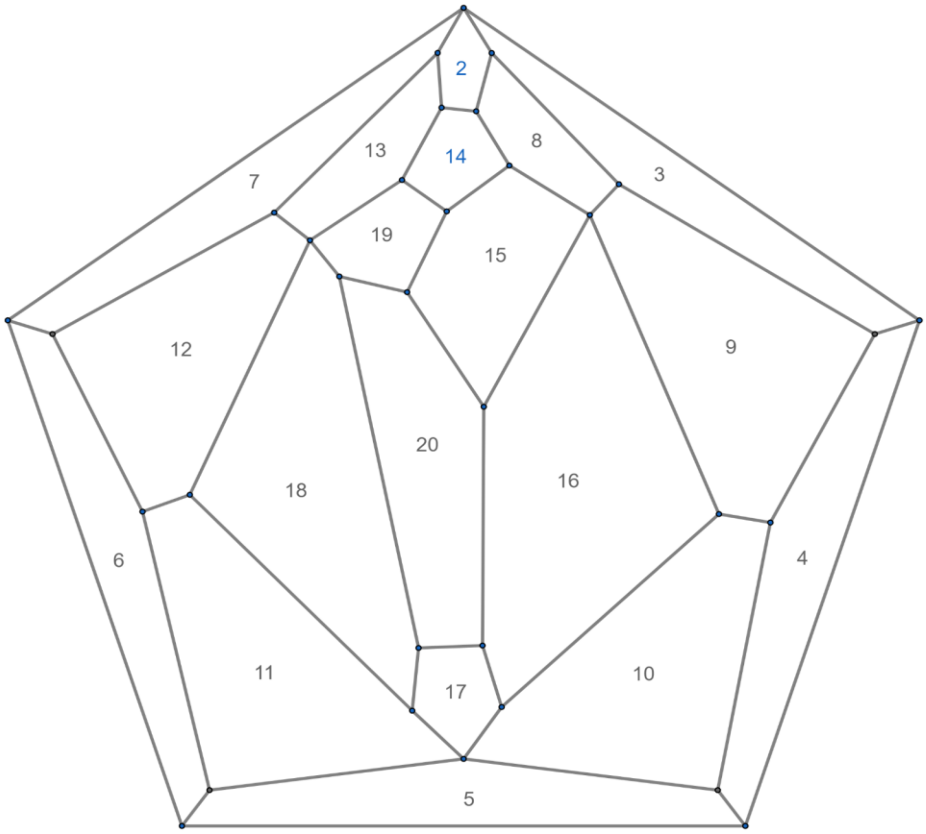
3) F=18

E=45; V=29; S=90; (S-3V)=3



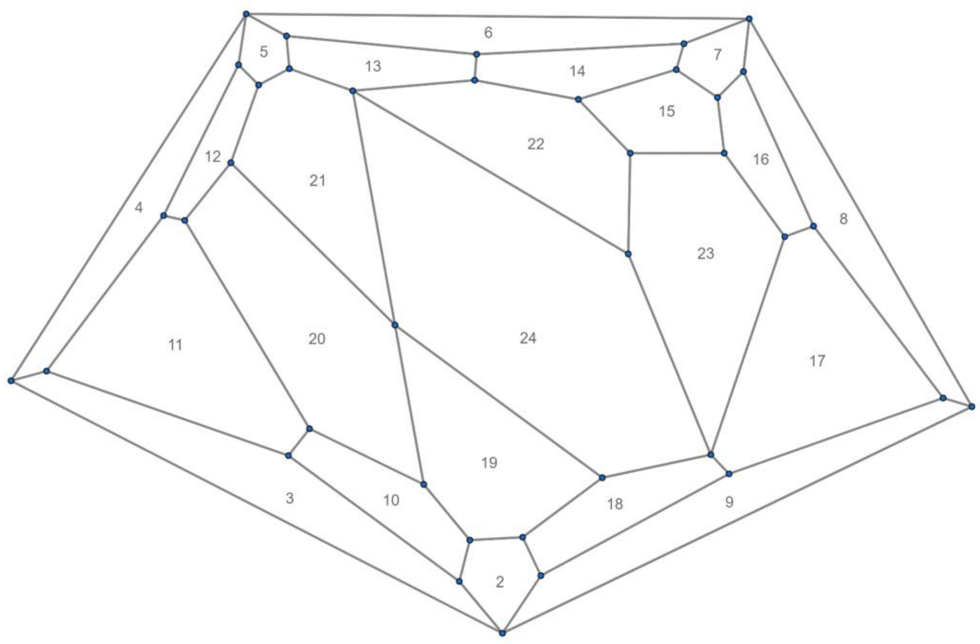
4) F=20

E=50; V=32; S=100; (S-3V)=4



5) F=24

E=60; V=38; S=120; (S-3V)=6



И этим заканчивается доказательство того, что, тогда и только тогда, когда $F=12$ и $F=2n\geq 16$ $\{\{F=12\}\cup\{F\geq 16\} \mid (F/2)\in\mathbb{N}\}$ существует выпуклый многогранник у которого все «F» грани пятиугольники

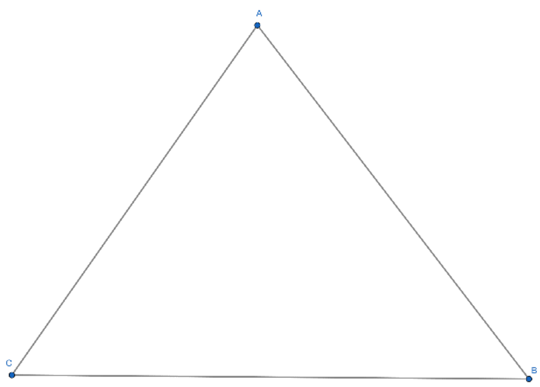
ВСЕ ГРАНИ ТРЕУГОЛЬНЫЕ

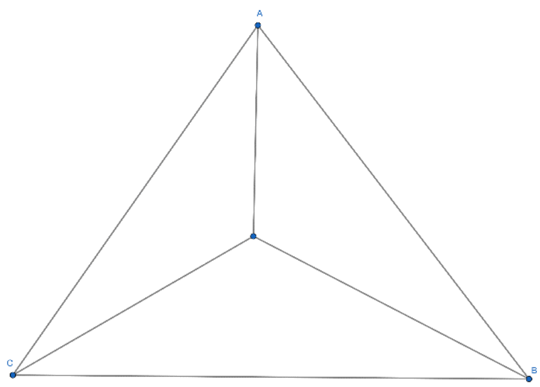
$(S-3V)=(6-m)*F/2-6\geq 0 \Longrightarrow F\geq 12/(6-m)=4$

То есть доказали, что, если все грани треугольники, то количество грань не может быть меньше 4

$E=3F/2 \quad \Longrightarrow \quad (F/2)\in\mathbb{N}$ То есть количество грань должен быть чётным.

И для всех $F=2n\geq 4$ существует выпуклый многогранник, у которого все грани треугольники, так как начиная от тетраэдра, заменяя грань другим тетраэдром, этим мы увеличиваем количество грань на 2, а значит сможем получить любой $F=2n\geq 4$





А значит, тогда и только тогда, когда $F=2n\geq 4$ $\{F\geq 4 \mid (F/2)\in\mathbb{N}\}$ существует выпуклый многогранник у которого все «F» грани треугольники

ВСЕ ГРАНИ ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНЫЕ

Сперва докажем что для F<6 и для F=7 не существует выпуклого многогранника у которого все «F» грани четырёхугольники

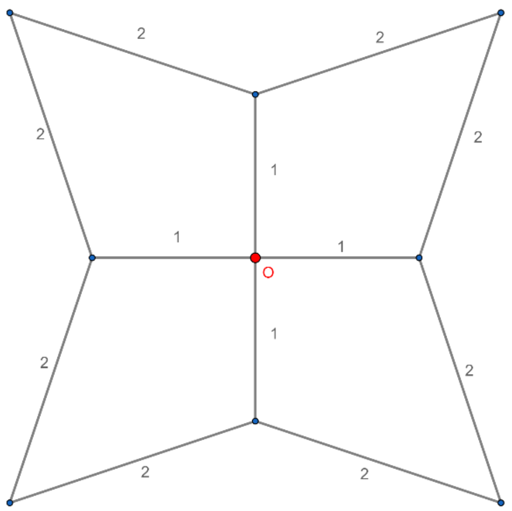
Как показали выше, $F \geq (12/(6\text{-}m))=12/(6\text{-}4)=6$ отсюда следует что, выпуклый многогранник у которого все грани четырёхугольники, не может иметь меньше 6 грань.

А теперь докажем, что, когда все грани четырёхугольники, выпуклого многогранника с количеством грань F=7 тоже не существует:

(S-3V)=(6-m)*F/2-6=(6-4)*7/2-6=1

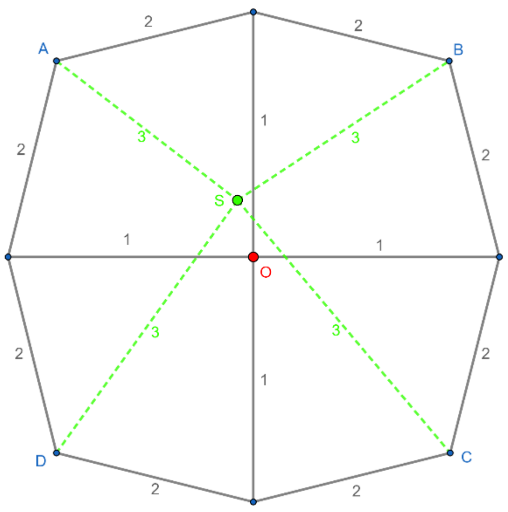
То есть, если такой многогранник существует, то ровно одна его вершина должна иметь степень 4, а все остальные вершины степень 3

И как для пятиугольников, тут тоже начиная построение от вершины со степенью 4, так как, все остальные вершины имеют степень 3, и все грани четырёхугольники в выпуклом многограннике, каждый «шаг» построения единственный



На рисунках, цифры у рёбер, это «шаг» построения, и на верхнем рисунке, показано что, уже после второго «шага» из полученного никак невозможно получить семигранник, так как для получения семигранника нужно добавить 3 грани, а для того чтобы из этого получилось выпуклый многогранник, необходимо добавить не менее четырёх грань (показано ниже).

А значит выпуклого семигранника, у которого все грани четырёхугольники не существует.



Для многогранников, у которых все грани четырёхугольники, хватает 4 построения для ƒ={6,8,9,11}

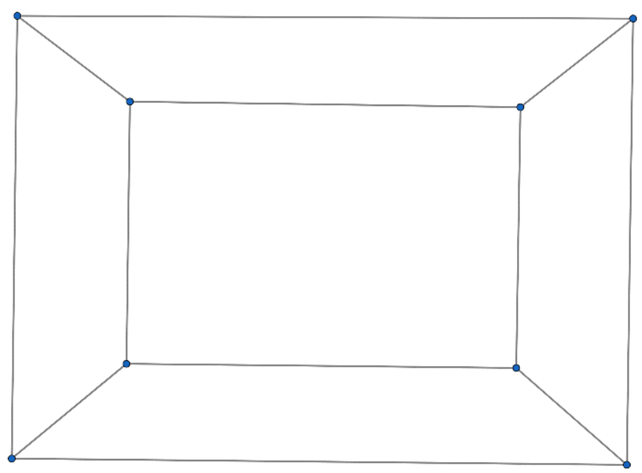
И используя ƒ=6 как «вставку» вместо некого четырёхугольника, мы всегда можем количество граней увеличить на 4, так что все грани останутся четырёхугольниками.

И заменяя (F-ƒ)/4 раз четырёхугольную грань, шестигранником, этим общее количество грань получим: ƒ+4*(F-ƒ)/4=F где «F» может быть F=10 либо любое натуральное число F>11

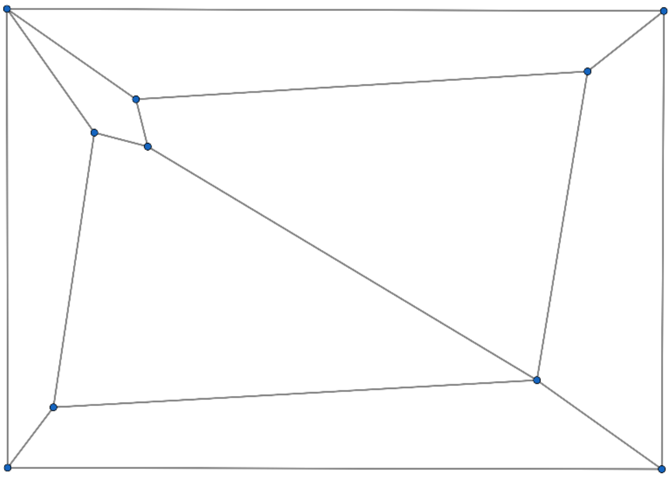
И получим что, выпуклый многогранник у которого все грани четырёхугольники, существует для {(F=6)∪(F≥8) | F∈ℕ}

А теперь покажем построения для ƒ=(6,8,9,11) и этим докажем, что кроме F=(1,2,3,4,5,7) для всех остальных «F» существует выпуклый многогранник, у которого все «F» грани четырёхугольники.

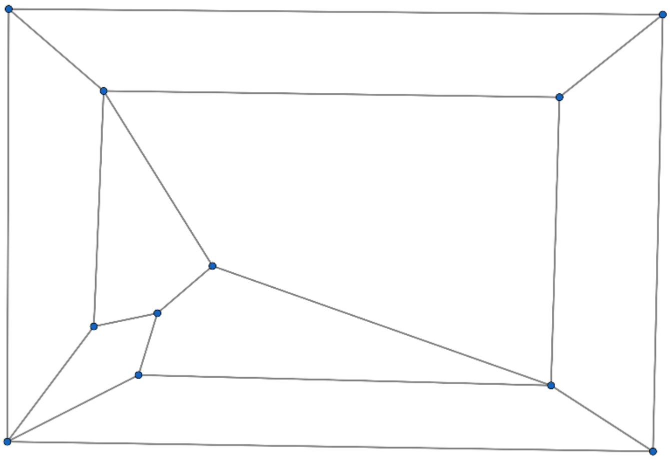
1. Рисунок для ƒ=6



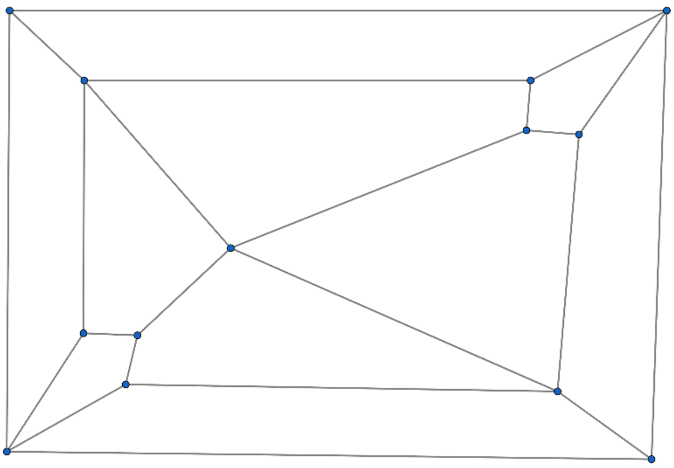
2. Рисунок для ƒ=8



3. Рисунок для ƒ=9



4. Рисунок для ƒ=11



А значит, тогда и только тогда, когда F=6 и F≥8 {(F=6)∪{F≥8} | F∈ℕ} существует выпуклый многогранник у которого все «F» грани четырёхугольники

Таким образом мы выявили полностью, всё множество «F», для которых существуют выпуклые многогранники, у которых все «F» грани являются многоугольниками с конкретным одинаковым количеством углов, по отдельности для треугольников, четырёхугольников и пятиугольников. И доказали, что, не существует выпуклого многогранника, у которого все грани являются многоугольниками, имеющими больше 5 углов.

Что касается вопроса, который был задан в изначальной задаче.

Естественно ƒ=2023 невозможно, так как когда все «ƒ» грани пятиугольные, нечётное количество грань исключено

А для ƒ=2022 и для ƒ=2024 существуют выпуклые многогранники, у которых все «ƒ» грани пятиугольные.

И для ƒ=2022 достаточно показать построение для 12-гранника, так как 2022=12+201*(12-2)

а для 2024 достаточно показать построение 12-гранника и ещё одного многогранника из 16,18,20,24

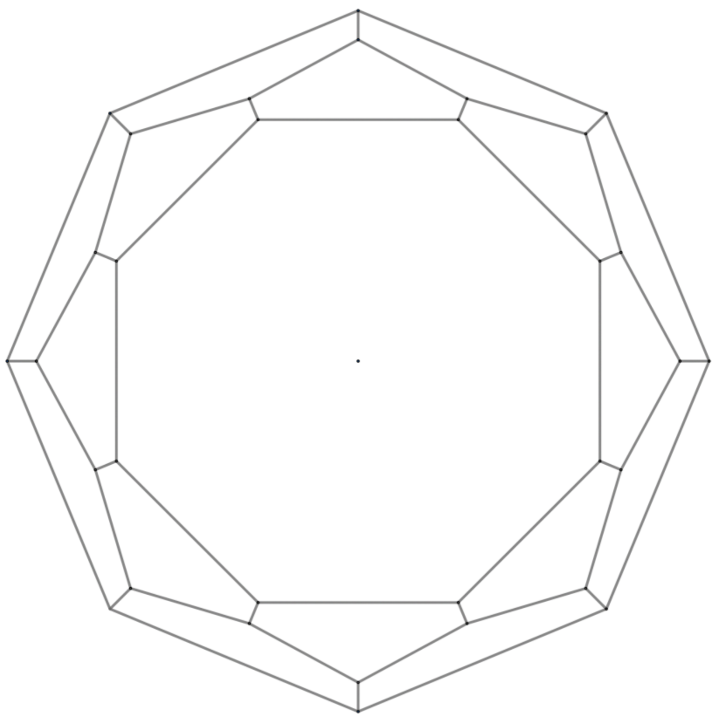
например, если покажем 12 и 16, то 2024=12+3*(16-2)+197*(12-2) (то есть, «объединяем» 3 шестнадцати-гранника и 198 штук 12-гранника, получаем F=3*16+198*12-2*(198+3-1)=2024)

а если, например, 12 и 24, то 2024=24+200*(12-2)

и т.д.

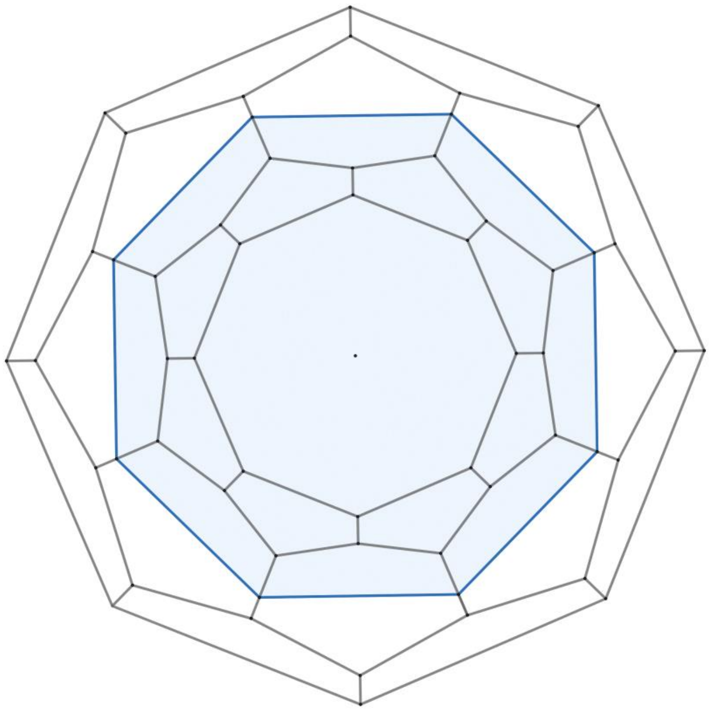
Кроме этого, доказать существование для ƒ=2022 и ƒ=2024, можно и другими путями, например,

Для любого n>2, можно построить выпуклый многогранник с количеством грань F=(2mn+2), где две грани будут n-угольники, а все остальные 2mn граней будут пятиугольниками.



На верхнем рисунке показан случай, для n=8, и m=1

Так как в полученном многограннике имеется грань 8-угольник, мы можем «подобный» многогранник «вставить» вместо 8-угольника



И после каждой такой замены, будет добавляться ровно 2n пятиугольников, а количество n-угольников, в многограннике всегда останется 2.

Таким образом, так как вместо восьмиугольника, мог быть любой выпуклый n-угольник, и такие замени можем проделать m раз, доказали что, для любых {(m,n)∈ℕ; n≥3} существует выпуклый многогранник с количеством грань F=(2mn+2), где две грани выпуклые n-угольники, а все остальные 2mn грани пятиугольники.

Но так как, если n=(3k+2) ⟶ n-угольник мы всегда можем разбить на «k» пятиугольников, значит, если n=(3k+2) можно получить многогранник у которого гранями будут [2m(3k+2)+2k] пятиугольников.

То есть, доказали что, для любого (m,k)∈ℕ; и F=[2m(3k+2)+2k]; существует выпуклый многогранник у которого все грани пятиугольники.

2022=2*202*(3*1+2)+2*1 → m=202, n=1
2024=2*72*(3*4+2)+2*4 → m=72, n=4

Отсюда следует что, для F=2022 и для F=2024 существует выпуклый многогранник, у которого все грани пятиугольники.

В общем доказательств существования для F=2022 и F=2024 не мало…

А вот для определения полного «списка» всех удовлетворяющих «F», изначально приведённый тут способ, считаю, что самый наглядный и простой.

Ответ на заданный вопрос в изначальной задаче:

Для $f=2023$ не существует выпуклого многогранника, у которого все «f» грани являются пятиугольниками.

А для $f=2022$ и для $f=2024$ существуют выпуклые многогранники, у которых все «f» грани являются пятиугольниками.