MM279

Овчинников Д.А.

5 мая 2022 г.

Заметим, что в таком многограннике $\frac{5f}{2}$ ребер (у граней по 5 сторон, и на каждом ребре сходятся ровно две какие-нибудь стороны), а поскольку это число должно быть целым, то допустимы только четные f, следовательно, случай (б) заведомо исключен. Воспользовавшись формулой Эйлера, получим, что в многограннике $\frac{3f}{2}+2$ вершин, откуда, поскольку удвоенное количество ребер не меньше утроенного количества вершин, мы получаем условие $f \geq 12$. Как известно, при $f = 12$ многогранники с только пятиугольными гранями существуют - например, додекаэдр. Попробуем сконструировать многогранник с большим количеством граней.

Допустим, существуют два многогранника, с f_1 и f_2 гранями. Мы можем совершить следующее действие: выберем по одной какой-то грани на каждом из них, слегка деформируем многогранники, чтобы эти грани стали равны и приложим их друг к другу. Получится выпукло-вогнутый многогранник. Если теперь мы переместим некоторые вершины так, чтоб телесные углы при них были направлены наружу, мы получаем выпуклый многогранник, все грани которого также пятиугольники (хотя необязательно правильные), и их ровно f_1+f_2-2.

Отсюда очевидно следует, что, добавляя к додекаэдру поочередно такие же додекаэдры, мы получим многогранник с $10n+2$ гранями, где n - любое натуральное число. Таким образом, $f = 2022$ допустимо. Будем называть такие многогранники многогранниками первого типа. Ясно, что если мы соединяем два многогранника первого типа, то мы получим многогранник с $10n+2+10m+2-2 = 10(n+m)+2$ гранями, то есть он так же принадлежит к первому типу. Выясним, существуют ли многогранники второго (и следующих, если понадобится) типа. Для этого надо показать, что существует хотя бы один многогранник с $f = 10n+k$, где $k \in \{0,4,6,8\}$. Склеивая такой многогранник сам с собой, мы можем получить многограник, у которого $k \neq 2$, откуда следует, что после нескольких склеиваний мы получим многогранник с любым наперед заданным числом f граней при условии, что f четно и достаточно велико (хотя критерий величины еще предстоит выяснить).

Удобнее всего конструировать симметричную фигуру с углом поворота $\frac{2\pi}{5}$ - тогда количество граней должно быть $10n+6$. Можно (не здесь) показать, что таким образом невозможно получить 16-гранник, однако, как видно из рис. 1, 26-гранник со всеми пятиугольными гранями существует.

Мы можем попытаться сконструировать еще какие-то многогранники, но, поскольку от нас требуется дать ответ при сравнительно больших f, остановимся на этом.

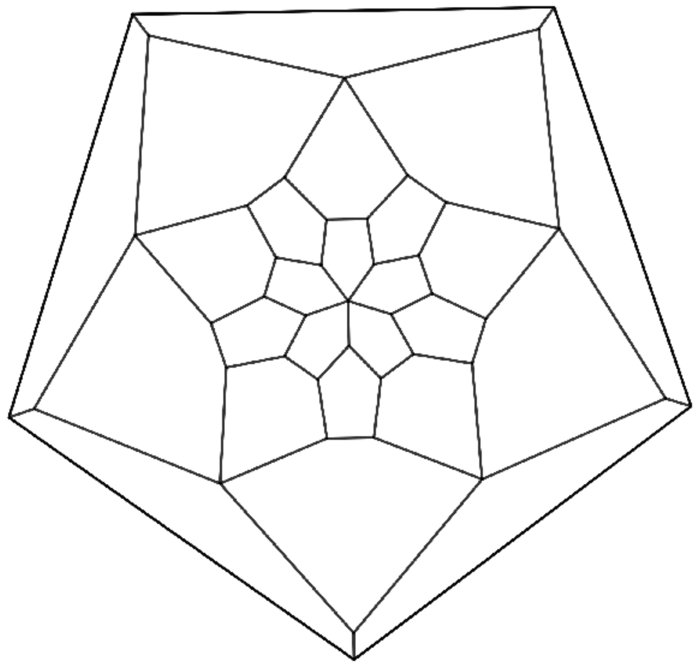

Рис. 1: Пятиугольный граф, соответствующий 26-граннику.

Заметим, что склеивая 26-гранник с каким-нибудь многогранником первого типа, получаем многогранник с $26 + 10n + 2 - 2 = 10n + 26$ гранями. Будем записывать это как $10m + 6, m \geq 2$ и назовем их многогранниками второго типа.

Склеивая многогранники второго типа между собой, мы получим многогранник третьего типа, у которого $10m + 6 + 10l + 6 - 2 = 10(m + l + 1) = 10k, k \geq 5$ граней. Наконец, многогранник четвертого типа получим, соединяя многогранники второго и третьего типов: $10m+6+10k-2 = 10(m + k) + 4 = 10p + 4, p \geq 7$, а пятого - два многогранника третьего типа: $10k + 10r - 2 = 10(k + r - 1) + 8 = 10s + 8, s \geq 9$.

Отсюда следует, что таким образом могут быть сконструированы многогранники с любым четным количеством граней, если $f \geq 90$ (а также 21 многогранник с меньшим f), поэтому ответ на вопрос задачи для $f = 2024$ так же положительный - в терминологии данного решения это многогранник четвертого типа. Для промежуточных восемнадцати значений f (а именно 14, 16, 18, 20, 24, 28, 30, 34, 38, 40, 44, 48, 54, 58, 64, 68, 78, 88) потребуется отдельное исследование для каждого случая, которое, однако, выходит за рамки поставленного в задаче вопроса.

Ответ. а) да, б) нет, в) да.