

ММ276

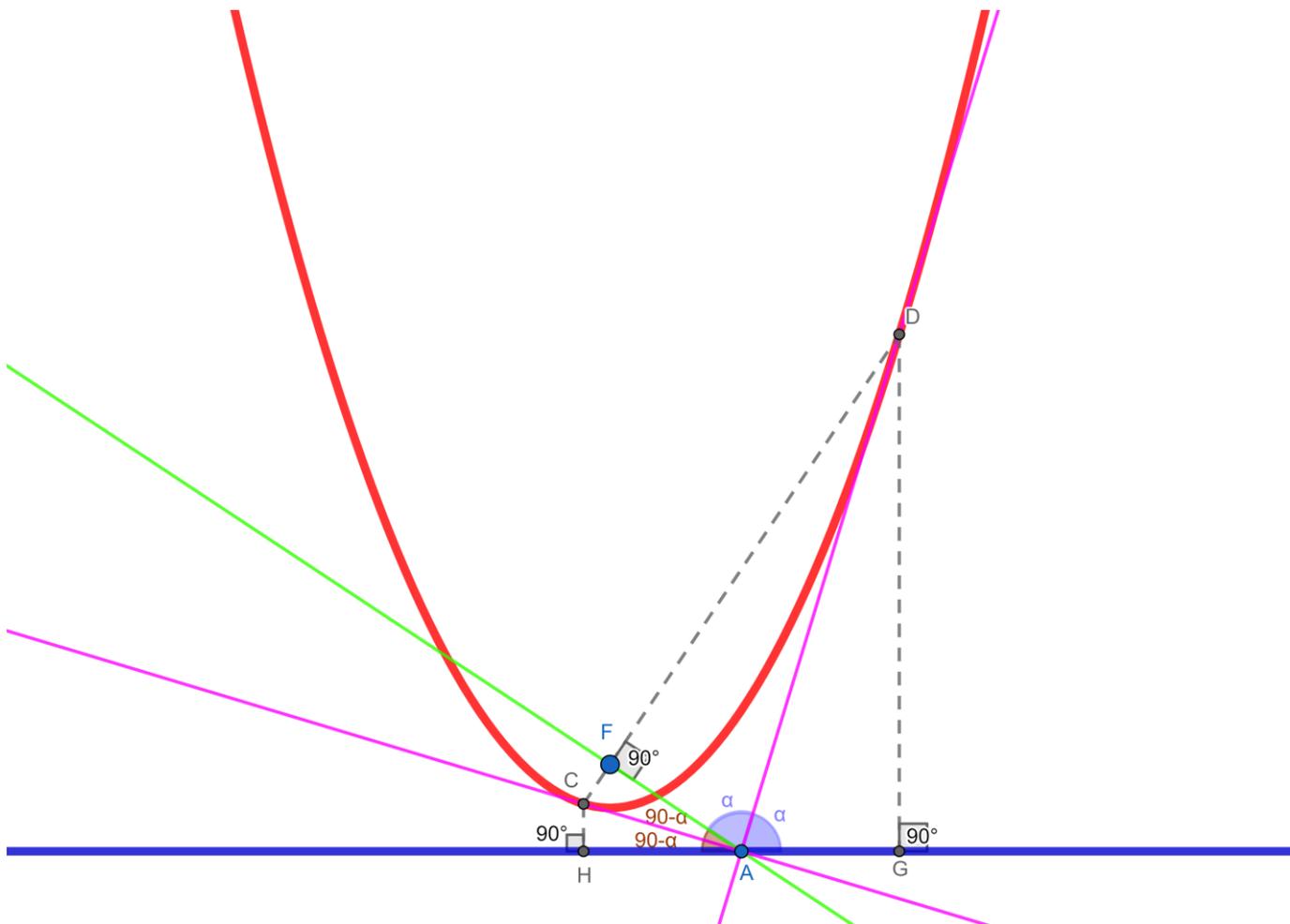
Треугольные параболы

Рассмотрим 3 параболы, связанных с треугольником. Фокус каждой - одна из вершин, а директриса - прямая, содержащая противоположную сторону.

Сколько точек пересечения могут иметь эти параболы?

Вся дальнейшие рассуждения и доказательство, будут опираться на следующем определении параболы:

«Множество всех точек на плоскости, равноудалённых от данной прямой (называемой **директрисой** параболы) и данной точки (называемой **фокусом** параболы) является **параболой**»

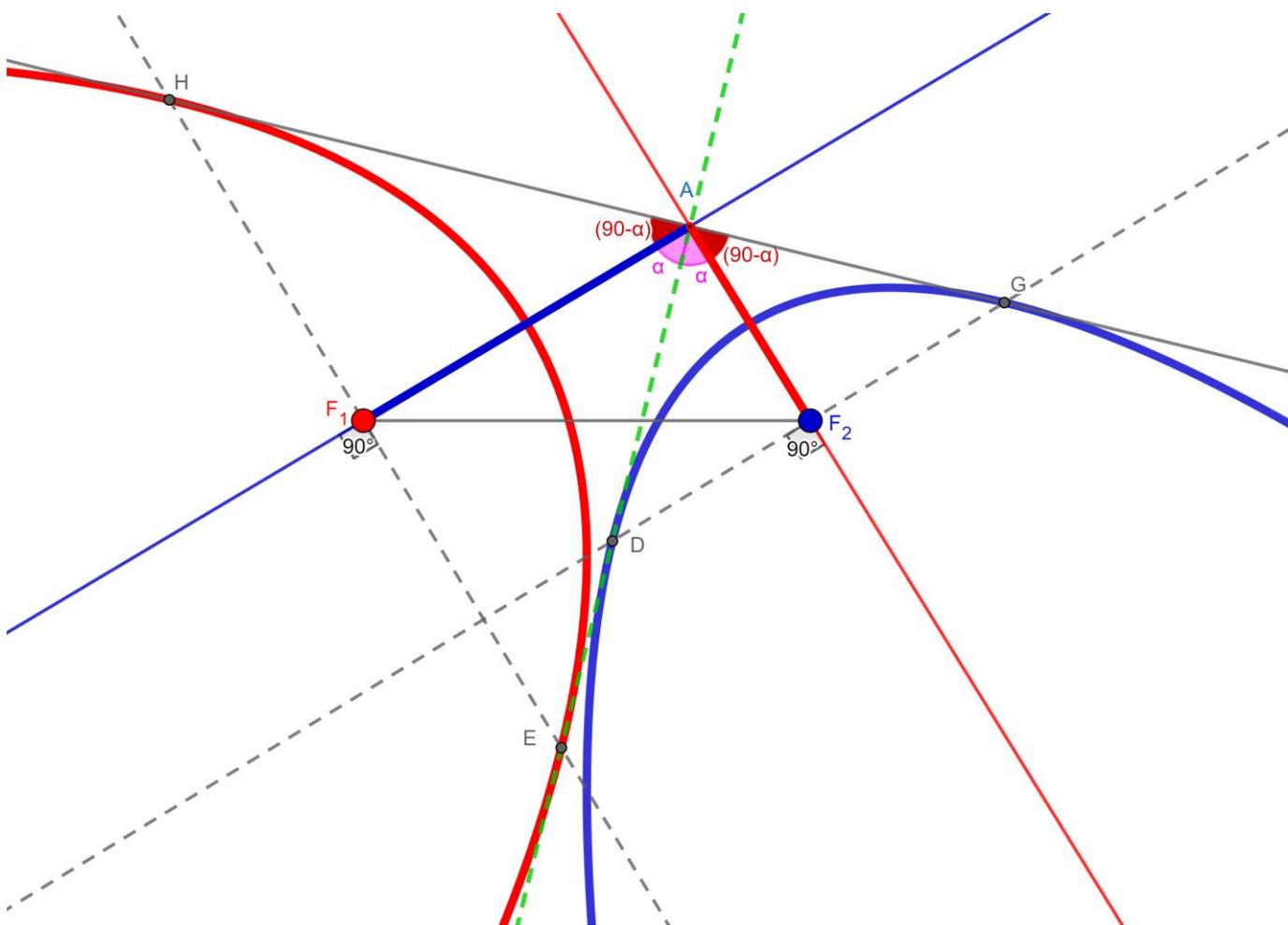


На верхнем рисунке показано, что, если через фокус параболы, провезти произвольную линию FA, которая директрису пересекает в точку «А», то биссектрисы углов, образованных от пересечения прямой FA и директрисы, будут являться касательными данной параболы. Так как, расстояние от любой точки биссектрисы до фокуса параболы, всегда больше или равно чем расстояние от этой

точки до прямой проходящей через фокус, а значит и расстояние от этой точки до директрисы тоже всегда меньше или равно расстоянию от этой точки до фокуса, так как расстояние от любой точки биссектрисы до этих двух прямых равны. А значит вся парабола лежит на одной стороне от биссектрисы, и так как у них имеется общая точка (точка пересечения перпендикулярной линии FA проходящая через фокус параболы, на рисунке это точки «С» и «D», и $(CD) \perp (FA)$), то значит эти биссектрисы являются касательными этой параболы.

Если две параболы, имеют общую касательную прямую, и их фокусы лежат в разных частях, то эти параболы не пересекаются, и если имеют общую точку касания, то не более одного, и на линии той общей касательной, по разным сторонам которого размещены их фокусы.

Если директрисы двух парабол пересекаются, и у каждой параболы, фокус находится на директрисе второй параболы, то биссектрисы углов пересечения их директрис, будут касательными прямыми для обеих парабол.



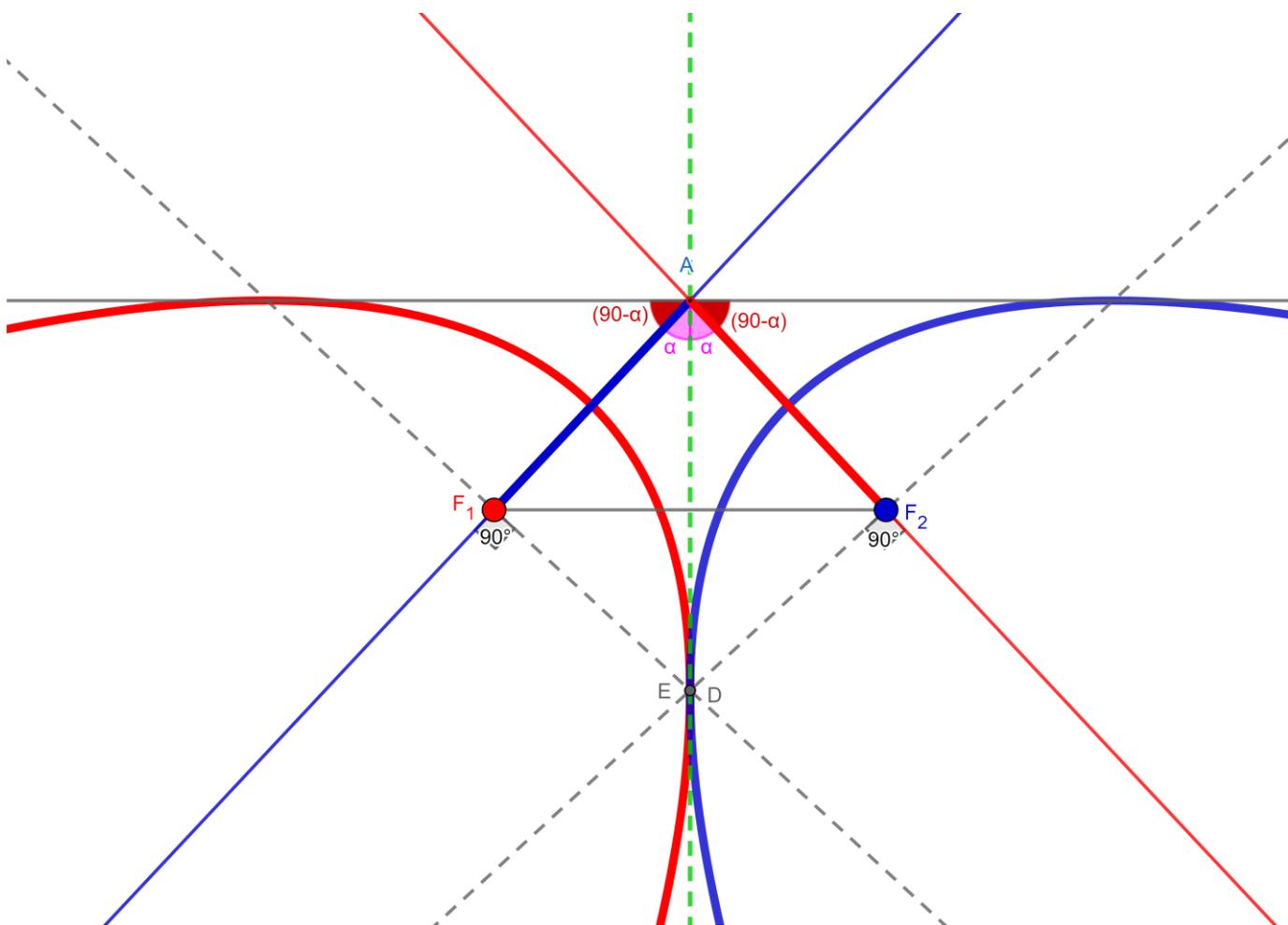
А значит такие две параболы, никогда не будут пересекаться, и касаться друг друга, они будут тогда и только тогда, когда $AE=AD$

$$\text{но } AE=AF_1/\cos(\alpha); AD=AF_2/\cos(\alpha) \rightarrow AF_1=AF_2$$

То есть получили что, если директрисы двух парабол пересекаются, и у каждой параболы фокус находится на директрисе второй параболы, то такие параболы не пересекаются, и

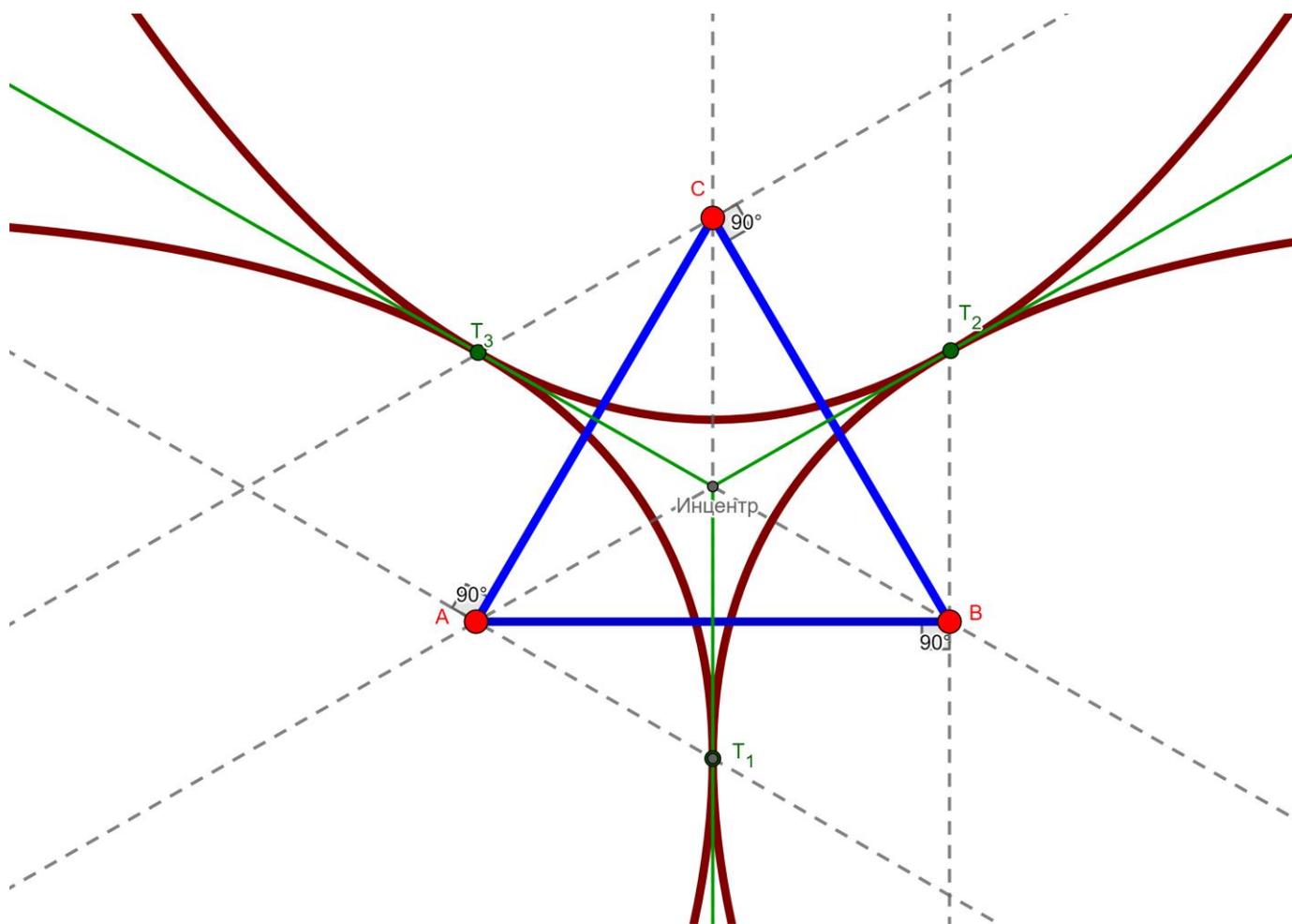
касаются друг друга тогда и только тогда, когда расстояние от фокусов данных парабол до пересечения их директрис равны.

И при этом, если расстояние от фокусов данных парабол до пересечения их директрис равны, точка касания парабол, всегда будет лежать на той бисектрисе угла пересечения их директрис, для которого фокусы этих парабол находятся в разных частях плоскости.

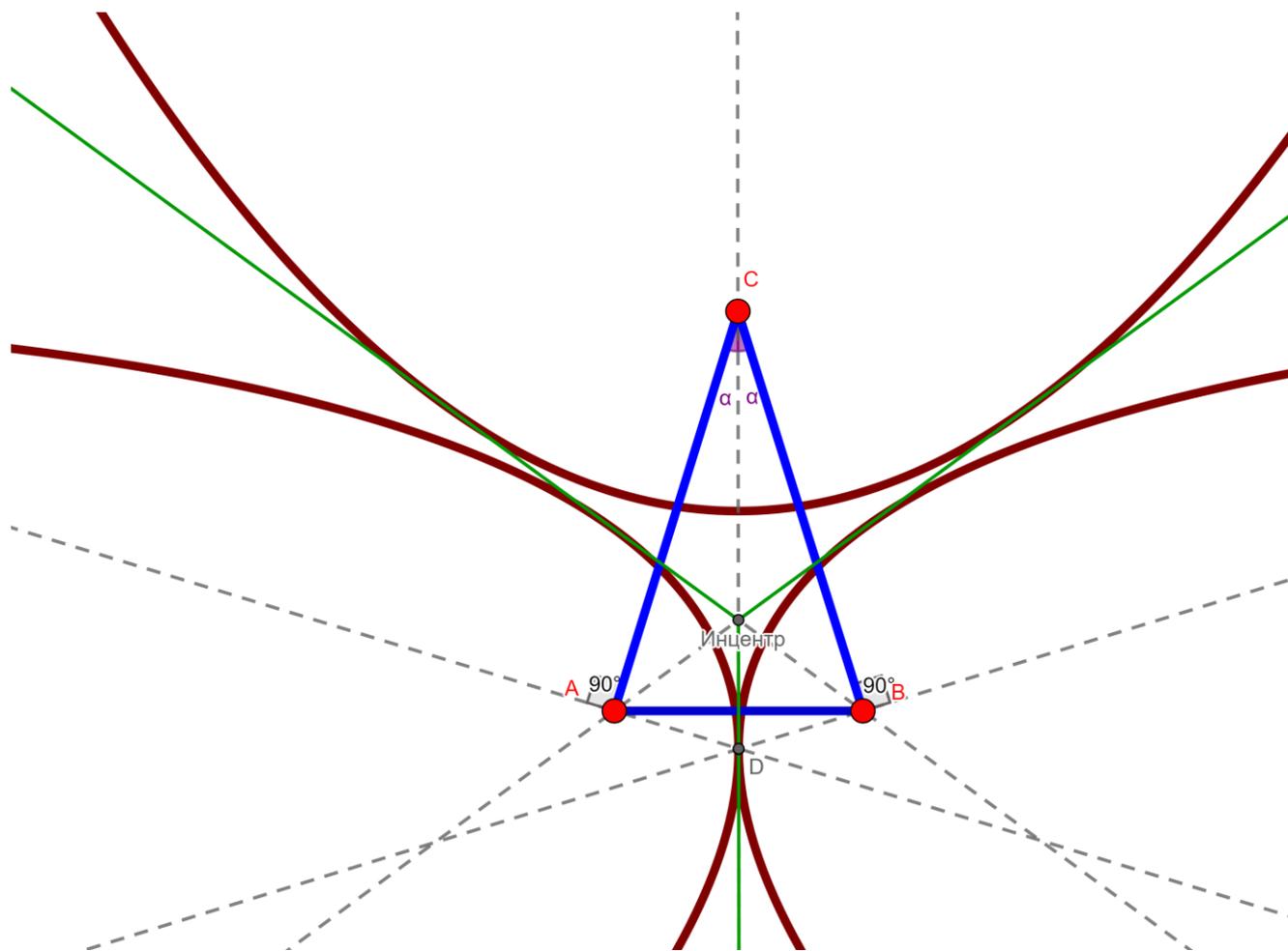


Получается, что всего для изначальной задачи имеется три случая

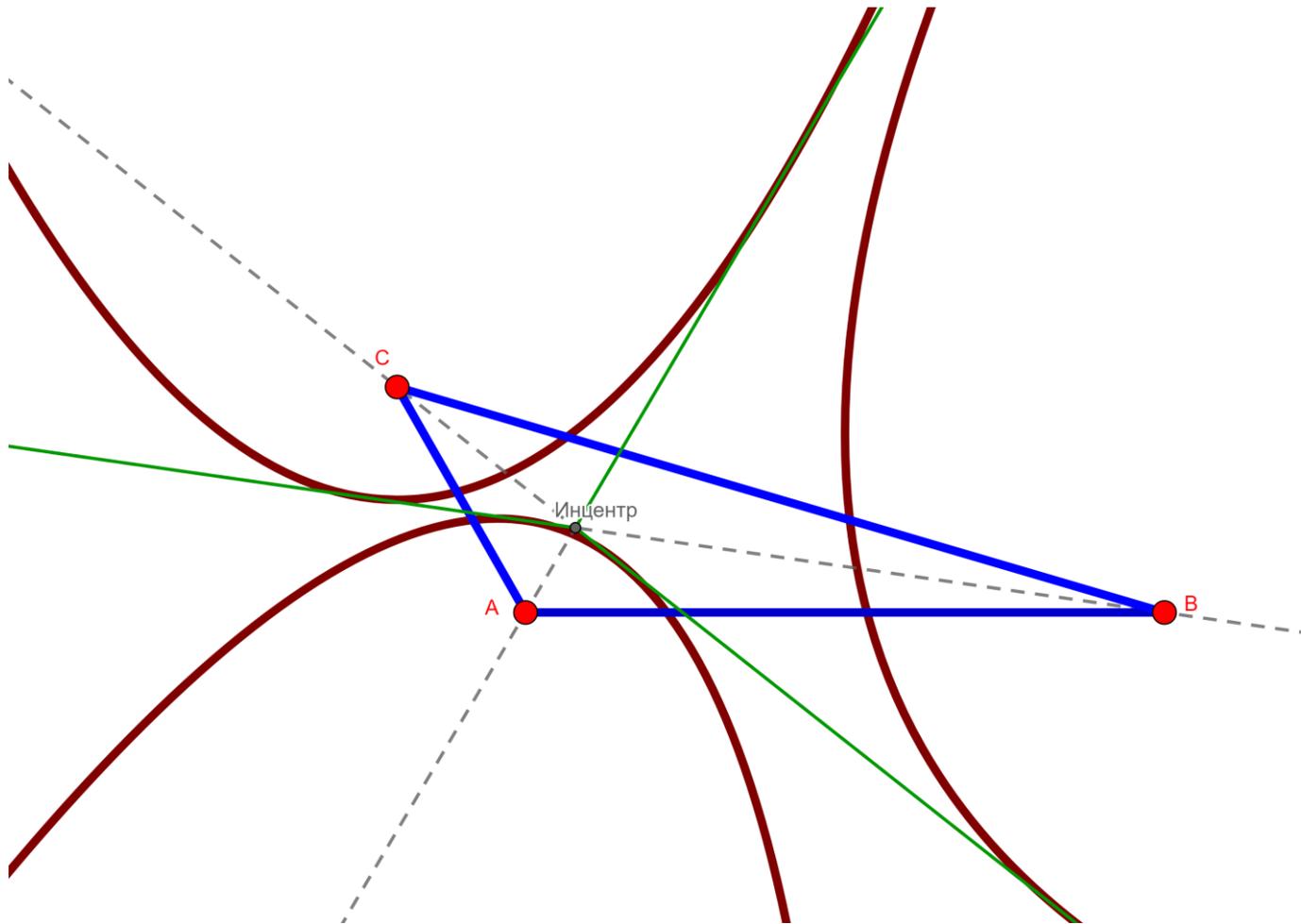
1. Если треугольник равносторонний, каждая пара парабол имеет по одной точке касания, а значит всего в этом случае параболы имеют три точки касания



2. Если треугольник равнобедренный, друг друга касаются только те параболы, фокусами которых являются вершины основания треугольника, а значит всего в этом случае имеется одна точка касания.



3. Если треугольник разносторонний, то, не у одной пары парабол, не имеется общая точка (не касаются)



Ответ: Такие параболы иногда касаются друг друга, но никогда не пересекаются.

По количеству точек касания, множество «треугольных» парабол, по типу связанным с ними треугольником, делится на три стандартные группы:

1. Равносторонний – три точки касания парабол
2. Равнобедренный – одна точка касания парабол
3. Разносторонний - нету точки касания парабол