Задача 276

13 апреля 2022 г.

Выясним, при каких условиях две параболы, построенные таким образом около двух вершин треугольника, имеют общие точку. Как известно, если заданы директриса и фокус, расположенный на расстоянии p от нее, то уравнение параболы можно записать в виде $2py = x^2$, где начало координат находится на середине перпендикуляра, опущенного из фокуса на директрису, ось Ox параллельна директрисе, о ось Oy направлена в сторону фокуса.

Пусть имеется произвольный треугольник ABC. Построим на его основе систему координат: центр координат поместим в вершине A, ось Ox направим в направлении от A до B, а в качестве единицы длины примем половину отрезка AC. Параметрами, задающими треугольник, будут длина $AB = a$ и угол $\angle CAB = \alpha$. Таким образом, точка B имеет координаты $(a, 0)$, точка C - $(2\cos\alpha, 2\sin\alpha)$.

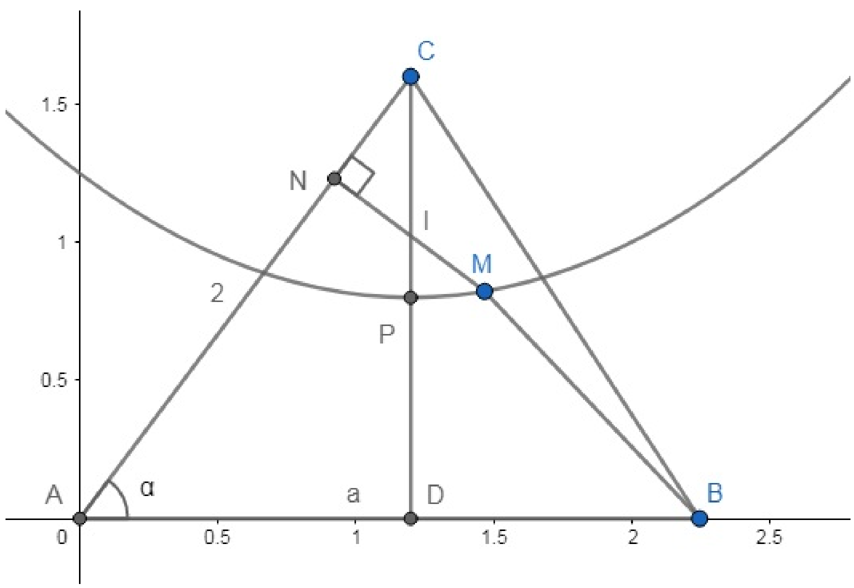

Рис. 1: Парабола в треугольнике.

Опустим из C на AB перпендикуляр CD, его середину обозначим P. Очевидно, ее координаты $(2\cos\alpha, \sin\alpha)$. Рассмотрим параболу, построенную около вершины C: эта вершина является ее фокусом, а директрисой - ось Ox, так что вершина находится в точке P, ее фокальный параметр равен $p = CD = 2\sin\alpha$. Следовательно, уравнение этой параболы имеет вид

$$4\sin\alpha(y - \sin\alpha) = (x - 2\cos\alpha)^2 \tag{1}$$

ГМТ параболы, построенной около вершины B - все точки, расстояние от которых до B и до прямой AC равны. Общие точки двух парабол должны также удовлетворять (1), так мы получим выражение, позволяющее найти их координаты. Выберем на первой параболе точку $M(x_M, y_M)$ и запишем:

$$MB^2 = (x_M - a)^2 + y_M^2. \tag{2}$$

Обозначим N - ближайшую к M точке прямой AC, $l = MN$. Вектор $\mathbf{MN}$ перпендикулярен $\mathbf{AC} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, то есть коллинеарен $(-\sin\alpha, \cos\alpha)$. Тогда координаты N равны $(x_M - l\sin\alpha, y_M + l\cos\alpha)$ (неизвестное l здесь может быть отрицательным, это не повлияет ни на что, так далее будем использовать l^2). Учтем, что $N \in AC$ (то есть ее координаты имеют вид $d\cos\alpha, d\sin\alpha$, где $d = AN$), поэтому

$$\frac{x_M - l\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y_M + l\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

откуда $l = x_M\sin\alpha - y_M\cos\alpha$. Условие того, чтобы M принадлежала второй параболе: $l^2 = MB^2$, то есть:

$$x_M^2\sin^2\alpha - 2x_My_M\sin\alpha\cos\alpha + y_M^2\cos^2\alpha = x_M^2 - 2ax_M + a^2 + y_M^2$$

Подставив сюда уравнение первой параболы и произведя элементарные преобразования, получим:

$$2ax_M = \frac{x_M^4}{16} + \frac{x_M^2}{2} + a^2 + 1 \tag{3}$$

Видно, что должно выполняться $x_M > 0$, так как a положительно по определению. Введем обозначения $x_M = 2\xi > 0, a = 2\mu^2$, тогда уравнение приобретет вид:

$$\xi^4 + 2\xi^2 - 8\mu^2\xi + 4\mu^4 + 1 = 0 \tag{4}$$

Замечательный факт - это уравнение не содержит угол α, то есть условие нахождения общих точек двух парабол требует лишь определенного соотношения длин сторон треугольника. Оно уже имеет неполный вид - стандартное обозначение его коэффициентов $p = 2, q = -8\mu^2, r = 4\mu^4 + 1$. Решим его, используя метод Декарта-Эйлера. Для этого рассмотрим соответствующее ему кубическое уравнение с коэффициентами $\left(1, \frac{p}{2}, \frac{p^2-4r}{16}, -\frac{q^2}{64}\right)$, или в явном виде:

$$\zeta^3 + \zeta^2 - \mu^4\zeta - \mu^4 = 0. \tag{5}$$

Оно легко решается, и его корни $\zeta_i = \{-1, \mu^2, -\mu^2\}$. Любой корень уравнения (3) равен одной из сумм $\pm\sqrt{\zeta_1} \pm \sqrt{\zeta_2} \pm \sqrt{\zeta_3}$, где знаки выбраны таким образом, чтобы выполнялось равенство $\left(\pm\sqrt{\zeta_1}\right)\left(\pm\sqrt{\zeta_2}\right)\left(\pm\sqrt{\zeta_3}\right) = -\frac{q}{8} = \mu^2$. Таким образом, получаем:

$$\xi_{1,2} = \mu \pm i(1-\mu), \xi_{3,4} = -\mu \pm i(1+\mu)$$

Обратим внимание, что величина ξ положительна, вообще говоря, действительна. Следовательно, решения уравнения имеют смысл только при $\mu = \pm 1 \Rightarrow a = 2$. Иными словами, у рассматриваемых парабол есть общие точки тогда и только тогда, когда $AB = AC$, то есть если треугольник равнобедренный (в том числе равносторонний - в этом случае общие точка будут у каждой пары парабол). При этом $\xi = \pm\mu = \pm 1$, следовательно, $x_M = 2$, откуда однозначно (по (1)) определяется y_M, то есть общая точка у этих парабол ровно одна - они только касаются друг друга. В равнобедренном треугольнике будет всего одна такая точка, а в равностороннем, соответственно, три.

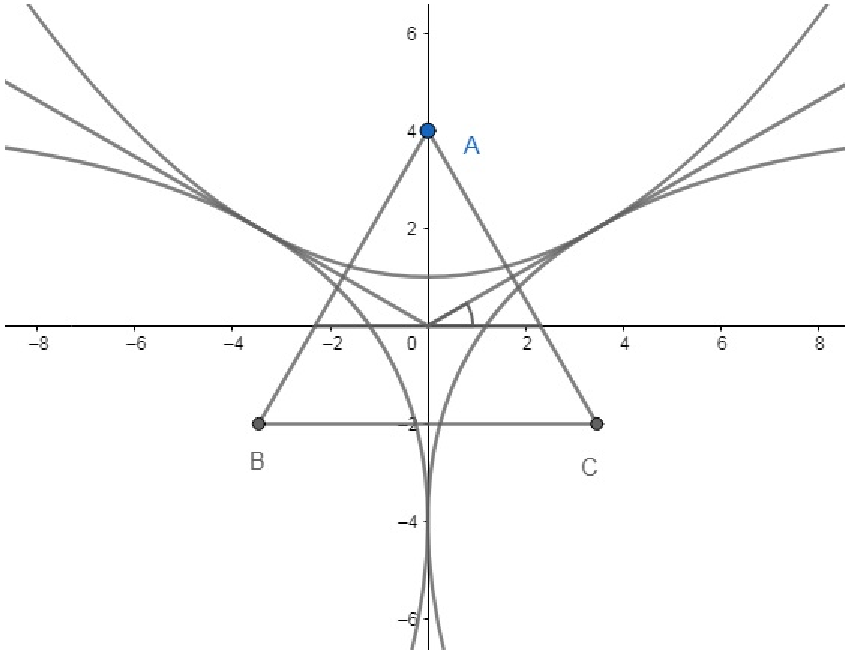

Рис. 2: Три параболы в равностороннем треугольнике.

Исследуем случай равностороннего треугольника отдельно - поместим начало координат в центр треугольника, ось Ox направим параллельно одной из сторон, и рассмотрим параболу, построенную около вершины, лежащей на оси Oy. Для удобства будем считать, что высота треугольника равна 6, поэтому координаты вершины $(4, 0)$, уравнение директрисы - $y = -2$. Вершина параболы - точка $(1, 0)$, а ее уравнение - $x^2 = 12(y - 1)$, или $y = 1 + \frac{x^2}{12}$. Рассмотрим касательную к параболе, проходящую через начало координат $y = kx$, тогда координаты точки касания определяются системой

$$y' = k = \frac{x}{6},$$

$$y = 1 + \frac{x^2}{12} = kx,$$

откуда $k = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, то есть угол наклона этой касательной к оси Ox равен $\frac{\pi}{6}$ (соответственно, $\frac{\pi}{3}$ к оси Oy), откуда следует, что парабола целиком расположена внутри угла $\frac{2\pi}{3}$. При этом заметим, что, повернув треугольник вокруг центра на угол $\frac{2\pi}{3}$, мы совместим его с самим собой, а параболы, так же повернувшись, совпадут. А значит, совпадут и касательные. Отсюда следует, что все параболы, построенные в расностороннем треугольнике, попарно касаются друг друга, что мы и получили выше.

Ответ. Параболы никогда не пересекаются, но могут попарно касаться: в трех точках (для равностороннего) или только в одной (для равнобедренного треугольника).