274) Пусть это поле из p^n элементов. Тогда его мультипликативная группа - циклическая из p^n-1 элемента и имеет $d(p^n-1)$ подгрупп.
А порождающих элементов она имеет $\varphi(p^n-1)$, откуда получаем уравнение $d(p^n-1)=\varphi(p^n-1)$.
Докажем, что при достаточно больших x $\varphi(x)\geq 2\sqrt{x}>d(x)$. Второе неравенство очевидно - все делители x разбиваются на пары, дающие в произведении x и в каждой паре один из делителей не превосходит $\sqrt{x}$.
Пусть $x=p_1^{k_1}\dots p_t^{k_t}$, тогда $\varphi(x)=p_1^{k_1}\dots p_t^{k_t}\cdot(1-\frac{1}{p_1})\dots(1-\frac{1}{p_t})$.
Мы хотим доказать неравенство $\varphi(x)>2\sqrt{x}$ или $\frac{\varphi^2(x)}{x}>4$. Запишем его.
$p_1^{k_1}\dots p_t^{k_t}\cdot(1-\frac{1}{p_1})^2\dots(1-\frac{1}{p_t})^2>4$
Рассмотрим выражение $p^k(1-\frac{1}{p})^2=p^{k-1}\cdot p(1-\frac{1}{p})^2=p^{k-1}(p-2+\frac{1}{p^2})$. Отсюда видно, что
1) Это выражение всегда не меньше $\frac{1}{4}$ и при $p\neq 2$ даже всегда не меньше единицы.
2) Оно не меньше $p^{k-1}\cdot 1$ при $p\neq 2$
3) При $p\geq 19$ оно всегда хотя бы 17.
4) Кроме того, оно всегда хотя бы 17 при таких значениях p и k
$p=3,\ k\geq 4$
$p=5,\ k\geq 3$
$p=7,11,13,17,\ k\geq 2$
Итак, чтобы это неравенство не выполнялось, нельзя брать простые числа, большие 17 (для них указанное выражение не меньше 17, для двойки - не меньше четверти, для прочих простых - не меньше единицы и произведение будет больше 4), числа $7,11,13,17$ можно брать максимум в первой степени, 5 максимум во второй, 3 максимум в третьей. Наконец поскольку $2^4(1-\frac{1}{2})^2=4$, а для всех прочих простых получаются выражения не меньше 1, то и 2 можно брать максимум в третьей степени.
Итак, это верно для всех чисел, начиная с $2^3\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 17$.
На самом деле, конечно же, эта оценка завышена. Все потенциально проблемные числа являются делителями данного, а этих делителей всего $4\cdot 4\cdot 3\cdot 2^4=768$, причем если в число входят одновременно много максимальных степеней простого, то оно тоже наверняка не подходит...
Я решил не мучиться и перебрал все делители этого числа компьютерной программой. Вот список тех, для которых частное реально не превосходит 4
$1,2,3,4,5,6,8,9,10,12,14,15,18,20,22,24,26,28,30,34,36,40,42,50,54,60,66,70,72,78,84,90,120$
Значит такое число не должно превосходить 120.
Перебирая числа до 120 на предмет того, верно ли для них $d(n)=\varphi(n)$, получим $1,3,8,10,18,24,30$
Прибавим к ним по единице и выберем только степени простых
$2,4,9,11,19,25,31$
Ух ты, они все - степени простых!
Ответ - конечные поля из $2,4,9,11,19,25,31$ элементов. Их семь.