ММ273

 В каком диапазоне может изменяться каждый из углов треугольника (𝛼 ≤ 𝛽 ≤ 𝛾),

 у которого центр окружности 9 точек принадлежит, по крайней мере, одной из сторон?



Исходным треугольником является, треугольник АСВ. (в котором, центр окружности 9 точек, лежит на стороне «АС»)

Точка «Е» является основанием высоты, опущенной на стороне «АС», а значит «окружность девяти точек» треугольника АСВ, должен проходить по точке «Е».

Но точка «Е» также является основой высоты и серединой стороны ВВ1 в равнобедренном треугольнике ВАВ1 а значит «окружность девяти точек» треугольника ВАВ1 тоже проходит по этой точке.

Получается, что, «окружность девяти точек» треугольника АСВ и «окружность девяти точек» треугольника ВАВ1 имеют не менее трёх общих точек, «F» (середина АВ), «H» (середина АВ1) и точку «E»,

А значит эти две окружности совпадают.

В добавок, «окружность девяти точек» треугольника АСВ сторону «АС» должен пересекать в середине.

Но так как, ортоцентр равнобедренного треугольника ВАВ1 должен лежать на прямой «АС» (ось симметрии), и окружность должен проходить именно в середине между ортоцентром и вершиной «А»

получается, что, вершина «С» (треугольника АСВ) является ортоцентром треугольника ВАВ1

А значит, прямая «ВС» перпендикулярно АВ1

Получаем следующих соотношении:

Так как, центр окружности, лежит конкретно на стороне «АС», а не просто на прямой «АС», отсюда следует: EC≤GC=AC/2 ⟹ EC≤AC/2

Из прямоугольных треугольников СЕВ и АЕВ следует:

EB\*ctg(α+β)≤EB\*(ctg(α)-ctg(α+β))/2 ⟹ ctg(α)≥3\*ctg(α+β)

а так как ∠BAB1=2α, из прямоугольного треугольника АDB следует: β=90-2α; (α+β)=90-α

а отсюда из треугольника АСВ следует: γ=90+α;

⟹

Из ранее полученного неравенство ctg(α)≥3\*ctg(α+β), следует что: ctg(α)≥3\*tg(α) ⟶ tg2(α)≤1/3

В итоге получили, что, центр окружности девяти точек треугольника АСВ, будет лежать на стороне АС (ближе к вершине «С» чем к «А»), тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:

1. α≤30;
2. β=(90-2α) (что равносильно что γ=(90+α))

**Ответ:**

1. **0 < α ≤ 30;**
2. **90 > β=(90-2α) ≥ 30;**
3. **90 < γ=(90+α) ≤ 120**