# MM273

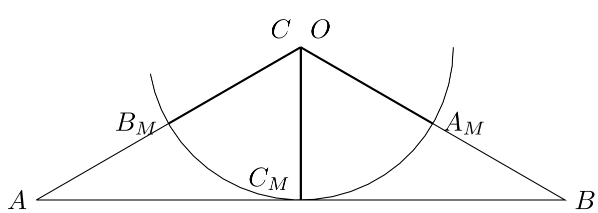
Дзюбенко В.А.

В каком диапазоне может изменяться каждый из углов треугольника ($\alpha \leq \beta \leq \gamma$), у которого центр окружности 9 точек принадлежит, по крайней мере, одной из сторон?

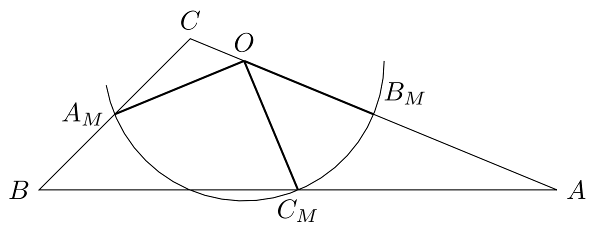
Окружность девяти точек любого треугольника содержит середины сторон, основания высот и середины отрезков, соединяющих вершины с ортоцентром. Поскольку окружность полностью определяется тремя своими точками, выберем три разные точки и будем с ними работать. В этой задаче удобнее всего выбрать середины сторон.

Далее будем обозначать $O$ — центр рассматриваемой окружности. Для начала попытаемся выяснить, на какой стороне треугольника может лежать $O$. Пусть $\Delta ABC$ — произвольный треугольник, через $A_M$, $B_M$, $C_M$ обозначим середины сторон $BC$, $AC$ и $AB$ соответственно. Рассмотрим два случая: когда $O$ совпадает с какой-нибудь вершиной треугольника, и когда не совпадает.

- Пусть $O$ совпала с вершиной $C$ (это общий случай, поскольку треугольник произвольный). Тогда, поскольку расстояния от $C$ до середин сторон совпадают, треугольник получается равнобедренный (см. рисунок ниже). Треугольник $\Delta ACC_M$ является прямоугольным, а отношение катета $CC_M$ к гипотенузе $AC$ равняется $1/2$, отсюда $\angle A = \angle B = 30^\circ$, $\angle C = 120^\circ$.




- Пусть $O$ не совпала с вершиной, и лежит где-то на отрезке $CB_M$ (это также общий случай). Тогда треугольник будет являться разносторонним, а сторона $AC$, на которой лежит $O$, будет средней по величине стороной. Докажем это. Обозначим радиус окружности через $r$, тогда:



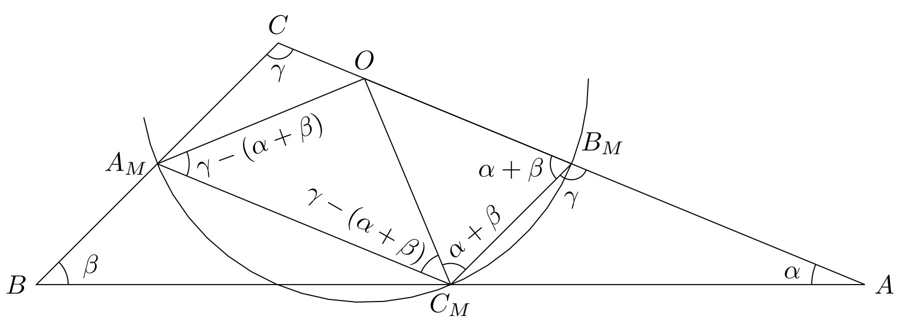

$$\left.\begin{aligned} &AC = 2 \cdot CB_M = 2(OC + r) \\ &BC = 2 \cdot CA_M < 2(OC + r) \text{ (Нер-во треугольника)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow BC < AC$$

С другой стороны, из неравенства треугольника $\Delta OAC_M$ для стороны $OA$

$$r + AB_M < r + AC_M \Rightarrow AC < AB.$$

Получаем неравенство сторон: $BC < AC < AB$. Раз все стороны различны, значит и все углы различны. Следуя обозначениям из условия, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$, $\alpha < \beta < \gamma$.

Проведём средние линии в треугольнике и найдём соотношения углов:

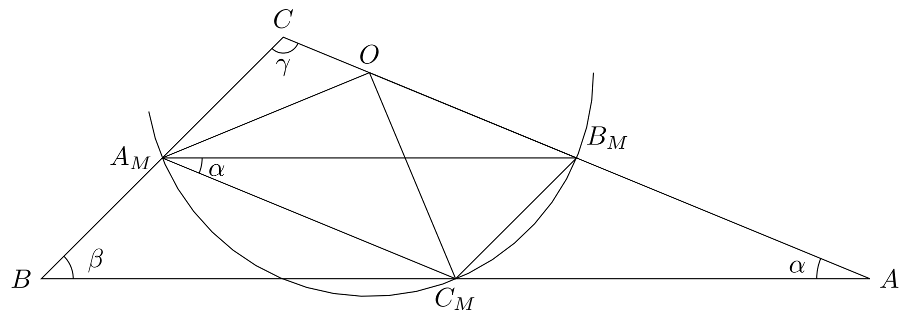



- Треугольник $\Delta AB_MC_M$ подобен исходному $\Delta ACB$, поэтому угол $\angle AB_MC_M = \angle C = \gamma$;
- Угол $\angle OB_MC_M$ смежен углу $\angle AB_MC_M$, поэтому $\angle OB_MC_M = 180^\circ - \gamma = \alpha + \beta$;
- Треугольник $\Delta C_MOB_M$ равнобедренный, отсюда $\angle OC_MB_M = \angle OB_MC_M = \alpha + \beta$;
- Угол $\angle A_MC_MB_M = \angle C = \gamma$, поскольку $CB_MC_MA_M$ — параллелограмм, отсюда углы равнобедренного треугольника $\angle OC_MA_M = \angle OA_MC_M = \gamma - (\alpha + \beta)$;
- Угол $\angle CA_MC_M = \alpha + \beta$ из свойств параллелограмма, поэтому маленький уголок $\angle CA_MO = 2(\alpha + \beta) - \gamma$ (на картинку не влез).

Поскольку все углы должны быть строго положительны, то получаем неравенства на $\gamma$

$$\gamma - (\alpha + \beta) > 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma > 90^\circ;$$
$$2(\alpha + \beta) - \gamma > 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma < 120^\circ.$$

Найти соотношение остальных углов теперь можно так: проведём оставшуюся среднюю линию и увидим, что $\angle B_M O C_M$ — центральный угол, а $\angle B_M A_M C_M$ — опирающийся на ту же дугу вписанный угол.




$\angle B_M A_M C_M = \alpha$ из подобия треугольника $\Delta A_M B_M C_M$ исходному, а $\angle B_M O C_M = 180^\circ - 2(\alpha + \beta)$ из уже известных нам углов треугольника $\Delta C_M O B_M$. В итоге получаем, что

$$\alpha = \frac{90^\circ - \beta}{2}$$

Заметим, что этими же формулами описывается и случай, когда центр $O$ совпал с вершиной $C$, поэтому окончательное условие на $\gamma$ можно сформулировать так:

$$90^\circ < \gamma \le 120^\circ;$$

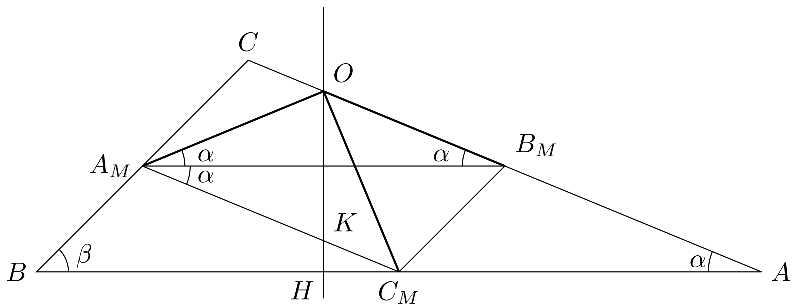
И неравенства на $\alpha$ и $\beta$ следующие:

$$0 < \alpha \le 30^\circ;$$
$$30^\circ \le \beta < 90^\circ.$$

Остался маленький нюанс. Из того, что $O$ лежит на стороне треугольника, следуют полученные соотношения углов. Но из этого не следует обратное. Вдруг для какого-то набора углов, для которых соотношения верны, центр окружности девяти точек таки не попадёт на сторону?

Докажем в обратную сторону. Нужно для каждого такого треугольника найти точку $O$, лежащую на стороне, и доказать, что расстояния от неё до середин сторон равны. Для треугольника $\alpha = \beta = 30°$, $\gamma = 120°$ всё довольно очевидно, расстояния от точки $C$ до середин сторон легко считаются. Поэтому рассмотрим остальные случаи.

Рассмотрим треугольник $\Delta ABC$ с углами $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$, $\alpha < \beta < \gamma$, $2\alpha = 90° - \beta$. Из этого равенства можно вычесть $\alpha$ и получить соотношение $\alpha = 90° - \alpha - \beta = \gamma - 90°$, или $90° + \gamma = \alpha$. Проведём серединный перпендикуляр через $A_M B_M$, и пересечение со стороной $AC$ обозначим $O$.




Отметим, что он именно пересекает отрезок $AC$ по его внутренней точке. Если это было бы не так, то точка $C$ лежала бы либо на самом перпендикуляре, либо по ту же его сторону, что и $A$, и можно легко доказать, что в таком случае $BC \geq AC$, то есть соотношения для углов не выполняются.

Докажем, что расстояния от $O$ до середин всех сторон равны. Во-первых, $OA_M = OB_M$, так как в треугольнике $\Delta OA_M B_M$ медиана и высота совпадают.

Пересечение перпендикуляра с $A_M C_M$ обозначим $K$, а пересечение с $AB$ обозначим $H$. И теперь треугольники $\Delta A_M CO$ и $\Delta OKC_M$ оказываются равны, докажем это:

- $\angle C = \gamma$ по условию: из трапеции $OB_M C_M K$ $\angle K = 180° - \angle O$; из прямоугольного треугольника $\Delta OHA$ $\angle O = 90° - \alpha$, поэтому $\angle K = 90° + \alpha$, а это равно $\gamma$ (следует из соотношений углов);

- Треугольник $\Delta OA_M K$ оказывается равнобедренным ($\angle KA_M B_M = \angle OB_M A_M = \angle OA_M B_M$), поэтому $A_M K = A_M O = B_M O$, а отсюда $CO = KC_M$;

- Трапеция $A_M COK$ – равнобедренная, потому что углы при основании равны: $\angle OKA_M = 180° - \angle OKC_M = 180° - \gamma$, $\angle CA_M K = 180° - \angle BA_M K = 180° - \gamma$. Поэтому $CA_M = OK$.

Треугольники $\Delta A_M CO$ и $\Delta OKC_M$ равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $OA_M = OC_M$. Значит $O$ – действительно искомая точка, и она действительно лежит на стороне треугольника. Что и требовалось доказать.

**Ответ:** $0 < \alpha \leq 30°; \quad 30° \leq \beta < 90°; \quad 90° < \gamma \leq 120°$.