MM271

Дзюбенко В.А.

Вася хочет найти натуральное число n, обладающее следующими свойствами:
1) наивысший показатель степени в каноническом разложении n равен 1;
2) наивысший показатель степени в каноническом разложении $n+1$ равен 2;
3) наивысший показатель степени в каноническом разложении $n+2$ равен 3;
4) наивысший показатель степени в каноническом разложении $n+3$ равен 4.
Существуют ли такие числа?

Да, существуют, и найти пример такого числа просто. Положим, что $n+1$ будет делиться на 5^2, $n+2$ будет делиться на 3^3, а $n+3$ — на 2^4. Получим систему уравнений в целых числах

$$\begin{cases} n+1 = 25x \\ 25x+1 = 27y \\ 27y+1 = 16z \end{cases}$$

с дополнительными условиями, что n свободен от квадратов, x свободен от кубов, y — от четвёртых, а z — от пятых степеней, а также x, y и z не делятся на 5, 3 и 2 соответственно.

Из второго и третьего уравнения, добавив условие, что z нечётно, получаем выражение для y:

$$y = 800k + 413, \quad k \in \mathbb{Z}$$

И n, с учётом натуральности, находится по формуле

$$n = 21600k + 11149, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Первое же решение всем остальным условиям удовлетворяет:
$n = 11149$;
$n+1 = 2 \cdot 5^2 \cdot 223$;
$n+2 = 3^3 \cdot 7 \cdot 59$;
$n+3 = 2^4 \cdot 17 \cdot 41$.

Понятно, что не при любом k мы получим решение: например при $k=1$ $n+1$ будет делиться на 5^3.

Однако существует бесконечное количество решений. Можно показать, что указанные условия будут выполняться для бесконечного количества k: нарушения условий просто будут встречаться «недостаточно часто». Для обоснования этого прибегнем к понятию асимптотической плотности множества $A \subset \mathbb{N}$:

$$d(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{a(N)}{N}$$

где $a(N)$ — количество элементов A, не превосходящих N.

Зададим S — множество таких натуральных k, при которых формула (1) даёт нам решение задачи. Возьмём первые N натуральных чисел и оценим, сколько из них будут лежать в S. Для этого вычтем количество тех, которые не лежат, и прикинем, сколько осталось.

Нам понадобится обозначение: $a_m(N)$ — количество чисел среди $1, \dots, N$, имеющий один и тот же остаток при делении на m. Известна асимптотическая плотность множества таких чисел:

$$\lim_{N \to \infty} \frac{a_m(N)}{N} = \frac{1}{m}$$

Чтобы оценить количество элементов в $S \cap \{1, \dots, N\}$, выкинем из всего промежутка количество таких k:

- при которых n не является свободным от квадратов. Это эквивалентно делимости n на некоторое простое p^2. Причём n не может делиться на 2, 3, 5, а с остальными простыми число 21600 будет взаимно просто. Это в свою очередь означает, что k имеет фиксированный остаток при делении на p^2:

  $$k \equiv -11149 \cdot 21600^{-1} \pmod{p^2}$$

  Значит, нужно выбросить столько элементов:

  $$a_{7^2}(N) + a_{11^2}(N) + a_{13^2}(N) \dots = \sum_{p \geq 7} a_{p^2}(N)$$

  Суммирование ведётся по простым p.

- при которых $x = 864k + 446$ несвободно от кубов. Так как x не делится на 2^3 и 3^3, нужно выбросить вот столько:

  $$\sum_{p \geq 5} a_{p^3}(N)$$

- по аналогии: при которых $y = 800k + 413$ несвободно от четвёртых степеней:

  $$a_{3^4}(N) + \sum_{p \geq 7} a_{p^4}(N)$$

- при которых $z = 1350k + 697$ несвободно от пятых степеней:
$$\sum_{p \geq 7} a_{p^5}(N)$$
- при которых x и y не делятся на 5 и 3 соответственно:
$$a_5(N) + a_3(N)$$
- z не делится на 2 никогда, поэтому здесь ничего не нужно выбрасывать.

Теперь можно оценить снизу количество элементов S, не превосходящих N, таким страшным выражением:

$$|S \cap \{1, \ldots, N\}| \geq N - \sum_{p \geq 7} a_{p^2}(N) - \sum_{p \geq 5} a_{p^3}(N) - \\ - a_{3^4}(N) - \sum_{p \geq 7} a_{p^4}(N) - \sum_{p \geq 7} a_{p^5}(N) - a_5(N) - a_3(N) \quad (2)$$

Разделим всё это дело на N и перейдём к пределу при $N \to \infty$:

$$d(S) \geq 1 - \sum_{p \geq 7} \frac{1}{p^2} - \sum_{p \geq 5} \frac{1}{p^3} - \frac{1}{3^4} - \sum_{p \geq 7} \frac{1}{p^4} - \sum_{p \geq 7} \frac{1}{p^5} - \frac{1}{5} - \frac{1}{3}$$

Здесь конечно возникает два вопроса, но о них чуть позже.

На первый взгляд, можно каким-то образом оценить эти суммы через значения дзета-функции Римана. Но мы поступим более простым путём. Перегруппируем слагаемые и занесём под один знак суммирования:

$$d(S) \geq 1 - \frac{1}{5^3} - \frac{1}{3^4} - \sum_{p \geq 7} \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^4} + \frac{1}{p^5} \right) - \frac{1}{5} - \frac{1}{3}$$

А дальше оценим сумму сверху. Для этого дополним её слагаемыми, где аргумент не простой:

$$\sum_{p \geq 7} \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^4} + \frac{1}{p^5} \right) \leq \sum_{m=7}^{\infty} \left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3} + \frac{1}{m^4} + \frac{1}{m^5} \right) \leq \ldots$$

Теперь дополним каждое слагаемое до бесконечной геометрической прогрессии:

$$\cdots \leq \sum_{m=7}^{\infty} \left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3} + \frac{1}{m^4} + \frac{1}{m^5} + \ldots \right) = \sum_{m=7}^{\infty} \frac{\frac{1}{m^2}}{1 - \frac{1}{m}} = \sum_{m=7}^{\infty} \frac{1}{m(m-1)} = \ldots$$

И получаем телескопический ряд:

$$\cdots = \sum_{m=7}^{\infty} \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} \right) = \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8} \right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9} \right) + \cdots = \frac{1}{6}$$

И теперь видим, что плотность больше нуля:

$$d(S) \geq 1 - \frac{1}{5^3} - \frac{1}{3^4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{5} - \frac{1}{3} = \frac{5663}{20250}$$

Вернёмся к вопросам, которые возникают при предельном переходе:

1. Откуда мы знаем, что у левой части неравенства существует предел? Мы же не доказывали, что наше множество S имеет асимптотическую плотность. Верно, не доказывали. Но на самом деле это не важно. Изначальная цель — показать, что S бесконечно. Вспомним, что у конечных множеств плотность существует и равна нулю. Если же $d(S)$ не существует, из этого уже следует, что оно бесконечно. Ну а если существует, то видим, что она больше нуля.

2. А у правой части существует предел? У каждого слагаемого по отдельности – да, но слагаемых бесконечно много. Можно ли переставлять знак предела и знак суммирования? Не всегда.

Ответ: Да.