О. Б. Полубасов 19.10.2012 г.

ММ167 (4 балла)

Решения принимаются, по крайней мере, до 21.10.12

Будем говорить, что треугольник принадлежит к классу k, если из него можно получить прикладыванием к нему другого треугольника (без наложения) ровно k различных равнобедренных треугольников. Найти все возможные значения k.

К любому вырожденному треугольнику можно приложить сколько угодно подходящих равнобедренных треугольников, чтобы в результате получился равнобедренный треугольник. Таким образом, бесконечное k достижимо, но вряд ли автор задачи имел в виду это решение. В дальнейшем будем считать, что все треугольники не вырождены.

Равнобедренным называется треугольник, углы при основании которого равны. Пусть углы исходного треугольника равны a, b и c. Прикладывая к треугольнику другой, мы увеличиваем один из углов на d, а один из других углов уменьшаем на то же самое d.

Можно переформулировать задачу: даны три положительных числа a, b и c, в сумме составляющие 180. Найти количество способов увеличить одно из чисел на сколько-нибудь и уменьшить одно из других чисел на столько же, чтобы какие-нибудь два числа совпали. При этом уменьшаемое число должно остаться положительным, а увеличиваемое – меньше 180. Затем следует отфильтровать возможные совпадения треугольников.

Из трёх попарно различных чисел выравниваемую пару можно выбрать тремя способами, при этом существует три способа выравнивания.

1. Меньшее из чисел пары увеличить, а большее – уменьшить.
2. Меньшее из чисел пары увеличить, а уменьшить третье число.
3. Большее из чисел уменьшить, а увеличить третье число.

Таким образом, принципиально может существовать 3*3 = 9 способов прикладывания треугольников.

Если два из трёх чисел совпадают, то выравниваемую пару можно выбрать одним способом (если не различать совпадающие числа), при этом существует три способа выравнивания, поэтому принципиально может существовать 3 способа прикладывания треугольников.

Если все три числа совпадают, то способов выбора выравниваемой пары нет.

Все возможные варианты треугольников перечислены в таблице. Первый столбец определяет возможные соотношения между углами, второй – позволяет отфильтровать невозможные результирующие треугольники, а также одинаковые треугольники. Столбец d показывает величину изменения углов,+ - увеличиваемый угол, - - уменьшаемый угол, a’, b’ и c’ - результирующие значения углов.

ВАРИАНТ		d	+	-	a’	b’	c’	№	k
$a < b < c$	$a + b > c$, $a + c \neq 2b$	(b - a)/2	a	b	(a+b)/2	(a+b)/2	c	1	9
		(c - b)/2	b	c	a	(b+c)/2	(b+c)/2	2	
		(c - a)/2	a	c	(a+c)/2	b	(a+c)/2	3	
		b - a	a	c	b	b	a+c-b	4	
		c – b	a	c	a+c-b	b	b	5	
		b – a	c	b	a	a	b+c-a	6	
		c – a	b	c	a	b+c-a	a	7	
		c – a	a	b	c	a+b-c	c	8	
		c – b	b	a	a+b-c	c	c	9	
	$a + b > c$, $a + c = 2b$	(b - a)/2	a	b	(a+b)/2	(a+b)/2	c		7
		(c - b)/2	b	c	a	(b+c)/2	(b+c)/2		
		b - a	a	c	b	b	b		
		b – a	c	b	a	a	b+c-a		
		c – a	b	c	a	b+c-a	a		
		c – a	a	b	c	a+b-c	c		
		c – b	b	a	a+b-c	c	c		
	$a + b \leq c$, $a + c \neq 2b$	(b - a)/2	a	b	(a+b)/2	(a+b)/2	c		7
		(c - b)/2	b	c	a	(b+c)/2	(b+c)/2		
		(c - a)/2	a	c	(a+c)/2	b	(a+c)/2		
		b - a	a	c	b	b	a+c-b		
		c – b	a	c	a+c-b	b	b		
		b – a	c	b	a	a	b+c-a		
		c – a	b	c	a	b+c-a	a		
	$a + b \leq c$, $a + c = 2b$	(b - a)/2	a	b	(a+b)/2	(a+b)/2	c		5
		(c - b)/2	b	c	a	(b+c)/2	(b+c)/2		
		b - a	a	c	b	b	b		
		b – a	c	b	a	a	b+c-a		
		c – a	b	c	a	b+c-a	a		
$a = b < c$	$2b > c$	(c - b)/2	b	c	b	(b+c)/2	(b+c)/2		3
		c – b	b	c	b	c	b		
		c – b	a	b	c	2b-c	c		
	$2b \leq c$	(c - b)/2	b	c	b	(b+c)/2	(b+c)/2		2
		c – b	b	c	b	c	b		
$a < b = c$	-	(b - a)/2	a	b	(a+b)/2	(a+b)/2	b		3
		b – a	a	b	b	a	b		
		b – a	c	b	a	a	2b-a		
$a = b = c$	-	-	-	-	-	-	-		0

Сначала рассмотрим случай, когда все три угла исходного треугольника различны ($a < b < c$).

1. Если $a + b > c$ и $a + c \neq 2b$, то существует 9 способов прикладывания, при этом возникают три пары подобных треугольников: (4, 5), (6, 7) и (8, 9).

У треугольника 6 боковая сторона равна $|ac|$, а у треугольника 7 – $|ab|$. Так как $b < c$, то $|ac| < |ab|$, поэтому треугольники различны.

У треугольника 8 длина основания равна $|ac|$, а у треугольника 9 – $|bc|$. Так как $a < b$, то $|bc| < |ac|$, поэтому треугольники различны.

У треугольника 4 $|ab|$ – это основание, а у треугольника 5 $|ab|$ – это боковая сторона. Так как $a + c \neq 2b$, то полученные треугольники – не равносторонние, а значит, различны.

2. Если $a + c = 2b$, то треугольники 3, 4 и 5 будут равносторонними (и одинаковыми, так как имеют общую сторону $|ab|$), поэтому два из них необходимо исключить.

3. Если $a + b \leq c$, то треугольники 8 и 9 становятся невозможными, так как углы получаются неположительными.

Теперь рассмотрим случай, когда два меньших угла исходного треугольника равны ($a = b < c$).

Если $2b > c$, то получаются три различных (даже не подобных) треугольника, а если $2b \leq c$ – то только два.

В случае, когда два больших угла исходного треугольника равны ($a < b = c$), получаются три различных (даже не подобных) треугольника.

В случае равенства всех углов исходного треугольника ($a = b = c$) никакие прикладывания невозможны.

Так как рассмотренные условия покрывают все типы треугольников, то никаких других значений k не существует.

ОТВЕТ. Существует 8 типов треугольников, распределяющихся по значению k на 6 классов. k € { 0, 2, 3, 5, 7, 9 }.