# Об одном утверждении А. Лебега

**Н. Н. Осипов**
Сибирский федеральный университет (Красноярск)
e-mail: nnosipov@rambler.ru

Фиксируем натуральное число $n > 1$ и введём следующие обозначения:

$$\xi = \cos(\pi/n) + i\sin(\pi/n), \quad \zeta = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n) = \xi^2.$$

Пусть $z$ и $w$ — комплексные числа, удовлетворяющие условиям:

$$|z| = |w| = 1, \quad \frac{z^2}{w^2} \neq \zeta^k \quad (k = 0,\, 1,\, \ldots,\, n-1).$$

На комплексной плоскости рассмотрим два набора прямых $\{L_s(z)\}$ и $\{R_t(w)\}$, где $L_s(z)$ — прямая, проходящая через точку 0 в направлении вектора $\xi^s z$, а $R_t(w)$ — прямая, проходящая через точку 1 в направлении вектора $\xi^t w$. В каждом наборе содержится в точности $n$ различных прямых. Пусть $p_{s,t}(z, w)$ — точка пересечения прямых $L_s(z)$ и $R_t(w)$.

Следующее утверждение впервые сформулировал Анри Лебег в 1940 году (см. оригинальную статью [1]). Теперь оно известно как *The Lighthouse Theorem* (*теорема о маяках*, см. [2]). Эта довольно простая теорема позволяет дать ещё одно доказательство знаменитой и нетривиальной *теоремы Морлея о трисектрисах* и в некотором смысле её обобщить (подробности есть в упомянутых статьях; одно из многочисленных доказательств теоремы Морлея приведено в хорошо известной книге [3]).

**The Lighthouse Theorem.** Совокупность всех $n^2$ точек $p_{s,t}(z, w)$ является объединением вершин некоторых $n$ правильных $n$-угольников $P_0$, $P_1$, …, $P_{n-1}$. Последовательные вершины $n$-угольника $P_k$ суть точки

$$p_{s,s+k}(z, w), \quad s = 0,\, 1,\, \ldots,\, n-1.$$

Каждый из них вписан в окружность, проходящую через точки 0 и 1.

Доказательство. Непосредственное вычисление показывает, что

$$p_{s,t}(z, w) = \frac{z^2 - z^2 w^2 \zeta^t}{z^2 - w^2 \zeta^{t-s}}.$$

При $t = s + k$ после несложных преобразований приходим к следующей формуле:

$$p_{s,s+k}(z, w) = \frac{1}{1 - (w/z)^2 \zeta^k} + \left[\frac{-w^2 \zeta^k}{1 - (w/z)^2 \zeta^k}\right] \zeta^s, \quad s = 0,\, 1,\, \ldots,\, n-1.$$

Теперь ясно, что точки $p_{s,s+k}(z, w)$ лежат на окружности с центром в точке

$$o_k(z, w) = \frac{1}{1 - (w/z)^2 \zeta^k}$$

и радиусом

$$r_k(z, w) = \frac{1}{|1 - (w/z)^2 \zeta^k|},$$

причём расположены они на этой окружности равномерно, т. е. в вершинах некоторого правильного $n$-угольника. Поскольку

$$|o_k(z,w)| = |1 - o_k(z,w)| = r_k(z,w),$$

указанная окружность проходит через точки 0 и 1. $\square$

Теореме о маяках можно придать форму, в которой она станет почти очевидной.

Пусть $L(z)$ — прямая, проходящая через точку 0 в направлении вектора $z$, а $R(w)$ — прямая, проходящая через точку 1 в направлении вектора $w$. Тогда их точка пересечения $p$ имеет вид

$$p = \frac{z^2 - z^2w^2}{z^2 - w^2} = \frac{1}{1-(w/z)^2} - \frac{1}{1-(w/z)^2}\, w^2.$$

Отсюда видно, что справедливо следующее утверждение.

**Предложение.** Если векторы $z$ и $w$ вращать в одном и том же направлении с постоянной угловой скоростью, то точка $p$ будет равномерно перемещаться по некоторой окружности (зависящей от начальных значений $z = z_0$ и $w = w_0$, но всегда проходящей через точки 0 и 1), причём с вдвое большей угловой скоростью.

Это утверждение понятно и геометрически: если векторы $z$ и $w$ повернулись на угол $\alpha$, а точка $p$ при этом переместилась из положения $p_1$ в положение $p_2$, то точки 0, 1, $p_1$, $p_2$ принадлежат одной окружности и угловая величина дуги $p_1p_2$ равна $2\alpha$.

Ещё одно очевидное замечание состоит в следующем. Пусть $h_s$ — основание перпендикуляра, проведённого из точки 1 к прямой $L_s(z)$, $s = 0, 1, \ldots, n-1$. Тогда

$$h_s = \frac{1 + z^2\zeta^s}{2},$$

и видно, что точки $h_s$ равномерно расположены на окружности с центром в точке 1/2 и радиусом 1/2. Если вектор $z$ вращать с постоянной угловой скоростью, то точки $h_s$ будут равномерно перемещаться по этой окружности с удвоенной угловой скоростью.

Ответим попутно и на такой вопрос: как будет двигаться точка $p$, если векторы $z$ и $w$ вращать с постоянной угловой скоростью, но в противоположных направлениях? Нетрудно видеть, что

$$\frac{p}{\overline{p}} = -z^2, \quad \frac{1-p}{1-\overline{p}} = -w^2,$$

откуда выводим

$$\frac{p(1-p)}{\overline{p}(1-\overline{p})} = (zw)^2 = (z_0w_0)^2.$$

Полагая $p = q + 1/2$, после несложных преобразований получим

$$\frac{q - z_0w_0\overline{q}}{1 - z_0w_0} \cdot \frac{q + z_0w_0\overline{q}}{1 + z_0w_0} = \frac{1}{4}$$

(здесь и далее мы считаем, что $(z_0w_0)^2 \neq 1$). Пусть $q = x + iy$. Тогда

$$U = \frac{q - z_0w_0\overline{q}}{1 - z_0w_0} = x - ay, \quad V = \frac{q + z_0w_0\overline{q}}{1 + z_0w_0} = x + a^{-1}y,$$

где число
$$a = -i\,\frac{1+z_0w_0}{1-z_0w_0}$$
вещественно. Имеем $UV = 1/4$, и если положить
$$u = \frac{U}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{x-ay}{\sqrt{a^2+1}}, \quad v = \frac{aV}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{ax+y}{\sqrt{a^2+1}},$$
то окончательно получим
$$uv = \frac{a}{4(a^2+1)}.$$
Поскольку координаты $(u, v)$ — прямоугольные, точка $p$ движется по некоторой прямоугольной гиперболе с центром в точке $1/2$.

## Список литературы


[1] *Lebesgue H.* Sur les $n$-sectrices d'un triangle [En mémoire de Frank Morley (1860—1937)] // L'enseignement Mathématique. 1940. V. 38. P. 39—58.

[2] *Guy R.* The Lighthouse Theorem, Morley & Malfatti — A Budget of Paradoxes // Amer. Math. Month. 2007. V. 114. P. 97—141.

[3] *Коксетер Г.С.М., Грейтцер С.Л.* Новые встречи с геометрией. М.: Наука, 1978.