◁ Так как базис $\mathfrak{B}'$ не ортонормирован (проверьте!), то, чтобы воспользоваться утверждением о связи матриц операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^*$, необходимо найти матрицу $[\mathbf{A}]_{\mathfrak{B}}$. Имеем

$$T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_{\mathfrak{B}'\to\mathfrak{B}} = T^{-1}_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

следовательно,

$$[\mathbf{A}]_{\mathfrak{B}'} = T^{-1}_{\mathfrak{B}'\to\mathfrak{B}} \cdot [\mathbf{A}]_{\mathfrak{B}'} \cdot T_{\mathfrak{B}'\to\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 6 & -4 & 6 \\ 6 & -5 & 5 \end{pmatrix}, \; [\mathbf{A}^*]_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ -3 & -4 & -5 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Отсюда окончательно получаем:

$$[\mathbf{A}^*]_{\mathfrak{B}'} = T^{-1}_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'} \cdot [\mathbf{A}^*]_{\mathfrak{B}} \cdot T_{\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} -36 & -37 & -15 \\ 30 & 30 & 14 \\ 26 & 27 & 9 \end{pmatrix}. \;\triangleright$$

3.150. Доказать, что операция * перехода от оператора $\mathbf{A}$ к сопряженному $\mathbf{A}^*$ обладает следующими свойствами:

а) $(\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{A}$.

◁ Запишем цепочку равенств, верных для любых векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$,

$$(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{A}^*\mathbf{y}) = \overline{(\mathbf{A}^*\mathbf{y}, \mathbf{x})} = \overline{(\mathbf{y}, (\mathbf{A}^*)^*\mathbf{x})} = \\ = \overline{\overline{((\mathbf{A}^*)^*\mathbf{x}, \mathbf{y})}} = ((\mathbf{A}^*)^*\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

т. е. $(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ((\mathbf{A}^*)^*\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Отсюда, в силу произвольности векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, получаем $\mathbf{A} = (\mathbf{A}^*)^*$ (показать подробнее!). ▷

б) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^* = \mathbf{A}^* + \mathbf{B}^*$; в) $(\mathbf{A}\mathbf{B})^* = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*$; г) $(\alpha\mathbf{A})^* = \overline{\alpha}\mathbf{A}^*$; д) $(\mathbf{A}^{-1})^* = (\mathbf{A}^*)^{-1}$, если $\mathbf{A}$ невырожден.

Линейный оператор $\mathbf{A}$ в базисе $\mathfrak{B}' = (\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n)$ имеет матрицу A. Найти матрицу сопряженного оператора $\mathbf{A}^*$ в том же базисе $\mathfrak{B}'$, если векторы $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ заданы столбцами своих координат в некотором ортонормированном базисе $\mathfrak{B} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$:

3.151. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $E'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3.152. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}$, $E'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $E'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.