ММ 269 (5 баллов)

Ответ: а) 6, б) 9.

Решение: Пусть у выпуклого многогранника v, e, f – количества вершин, ребер, граней, и $(f_3\ , f_4, \dots, f_s)$ – вектор граней, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v$ – степени вершин. Выпишем известные и полученные в предыдущих задачах ММ соотношения:

$$f = f_3 + f_4 + \cdots + f_s$$

$$2e = 3f_3 + 4f_4 + \cdots + sf_s$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ \dots + \alpha_v = 2e$$

Поскольку в каждой вершине сходится не меньше трех ребер: $\alpha_j \geq 3$, то имеем $(\alpha_1 - 3) + (\alpha_2 - 3) + \ \dots + (\alpha_v - 3) \geq 0$.

С другой стороны $(\alpha_1 - 3) + (\alpha_2 - 3) + \ \dots + (\alpha_v - 3) = 2e - 3v$

С учетом теоремы Эйлера для выпуклых многранников $v = e + 2 - f$, получаем

$$(\alpha_1 - 3) + (\alpha_2 - 3) + \cdots + (\alpha_v - 3) = 2e - 3(e + 2 - f) = 3f - e - 6 =$$

$$= 3(f_3 + f_4 + \cdots + f_s) - \frac{3f_3 + 4f_4 + \cdots + sf_s}{2} - 6$$

$$= \frac{3f_3}{2} + f_4 + \frac{f_5}{2} - \frac{f_7}{2} - f_8 - \cdots - \left(\frac{s}{2} - 3\right) f_s - 6$$

Так что

$$(\alpha_1 - 3) + (\alpha_2 - 3) + \ \dots + (\alpha_v - 3) + \frac{f_7}{2} + f_8 + \cdots + \left(\frac{s}{2} - 3\right) f_s + 6$$

$$= \frac{3f_3}{2} + f_4 + \frac{f_5}{2}$$

И если известно, что $f_k \leq m, k = 3,4, \dots, s$, то учитывая также неотрицательность слагаемых слева, получим оценку для каждого $j = 1,2, \dots, v$:

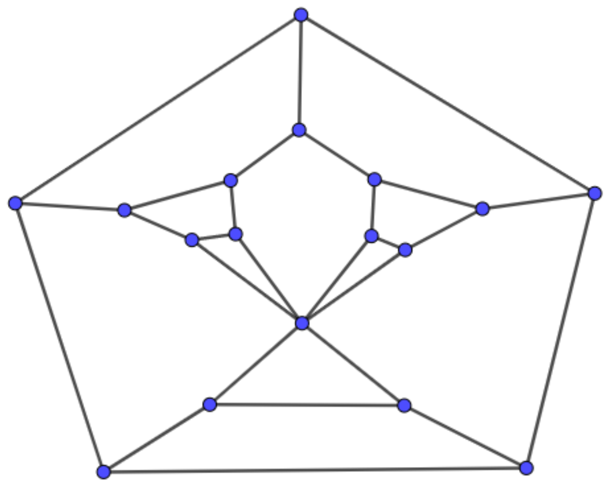
$$\alpha_j - 3 + 6 \leq \frac{3m}{2} + m + \frac{m}{2}$$

$$\alpha_j \leq 3m - 3.$$

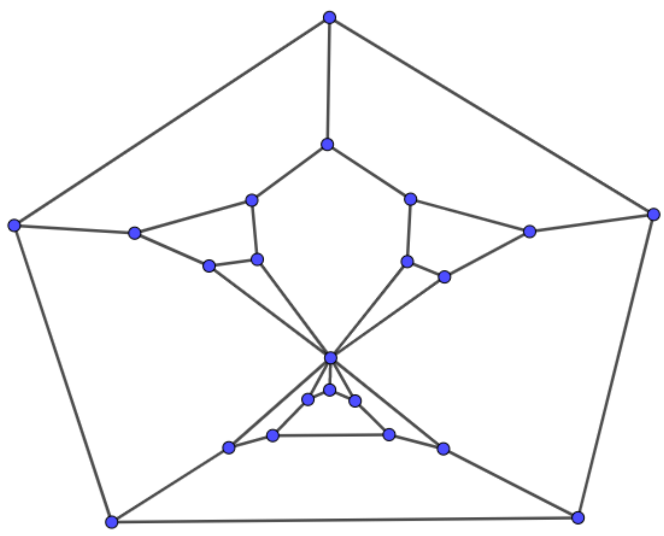
$$\alpha_{max} \leq 3m - 3 \qquad (1)$$

При $m = 3$ максимальная степень вершины не превосходит 6, а при $m = 4$ максимальная степень вершины не превосходит 9.

Приведенные ниже примеры многогранников (так как соответствующие им графы планарны и 3-связны) и их векторов граней, показывают, что эти оценки достигаются.



(3,3,3,3)



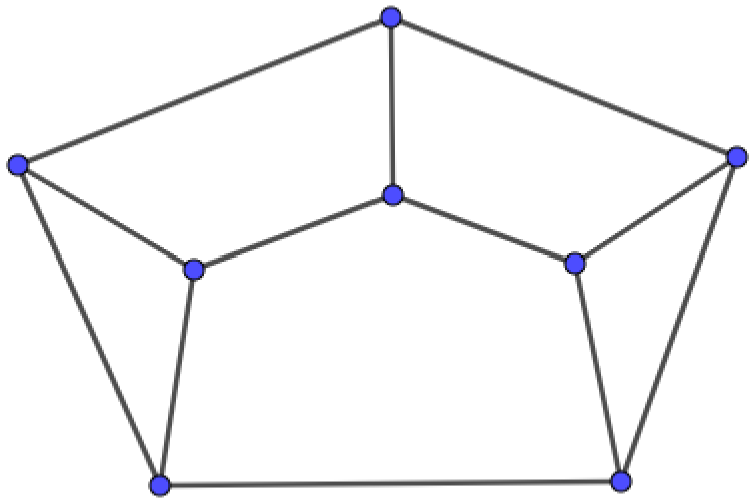
(4,4,4,4)

Для того, чтобы понять, какие точные оценки возникают для выпуклых многогранников, приведем сначала утверждения, относящиеся к **связным планарным графам.**

Дополнение 1. При $m = 1$ оценка (1) превращается в невозможное неравенство $\alpha_j \leq 0$. Так что выпуклых многогранников также как и связных планарных графов класса 1 не существует.

Но оказывается, что оценка (1) достигается для связных планарных графов при каждом $m \geq 2$.

При $m = 2$ имеем такой граф

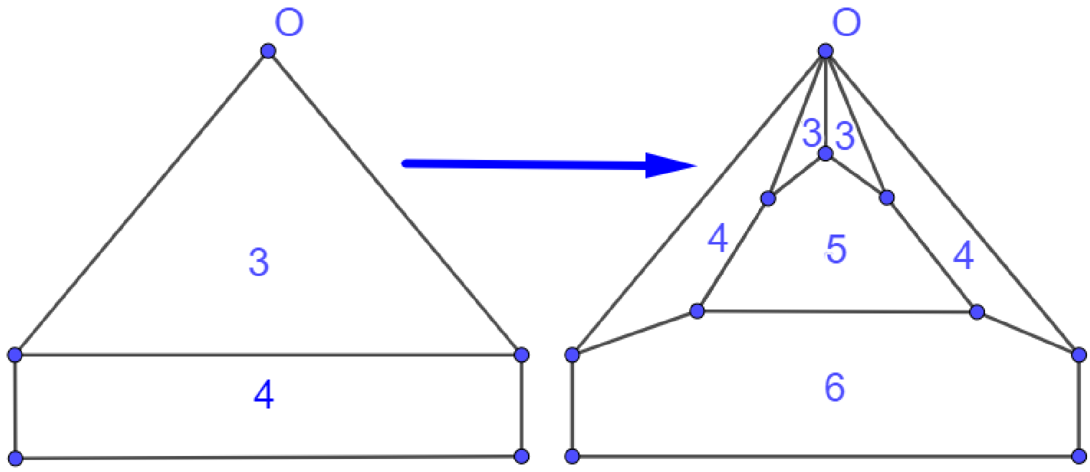


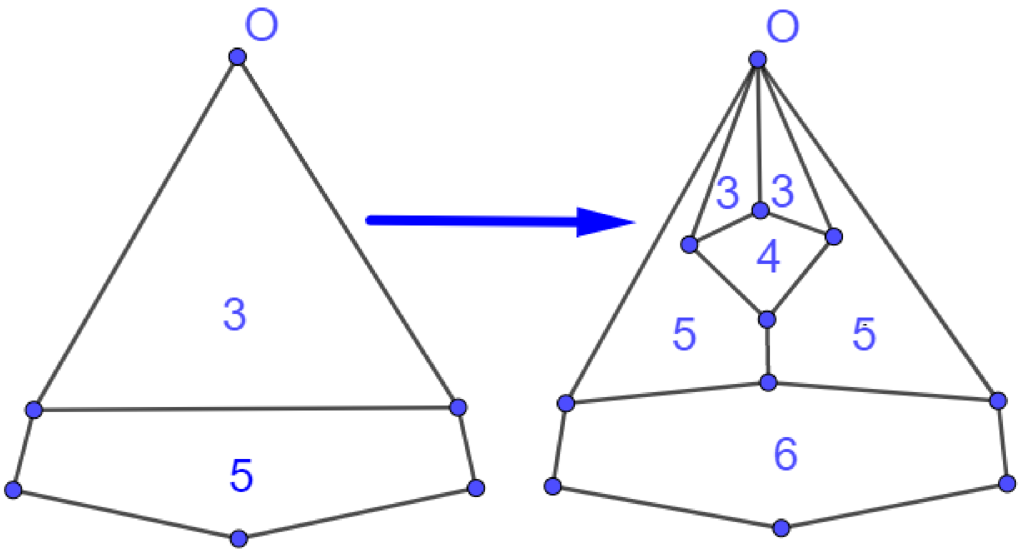
(2,2,2) – с учетом внешней грани (здесь и далее).

При $m = 3,4$ мы уже построили соответствующие графы.

Пусть при $m = t \geq 3$ уже построен планарный граф с ограничениями $f_k \leq t$ и вершиной O, имеющей степень $3t - 3$.

Причем вершина O является вершиной треугольной грани, к которой примыкает четырехугольная или пятиугольная грань без вершины O (условие А). Тогда добавляем вершины и ребра так, как показано в каждом из этих двух случаев. Видим, что при этом каждое из значений f_3, f_4, f_5, f_6 увеличивается на 1, а количество ребер, сходящихся в вершине O, увеличивается на 3. Таким образом для построенного графа $f_k = t + 1$ и для него достигается оценка (1), то есть присутствует вершина, имеющая степень $3t$.





При этом для построенного графа вершина O также является вершиной треугольной грани, к которой примыкает четырехугольная или пятиугольная грань без вершины O.

Дополнение 2. Более общо, пусть для данной последовательности $\{m_k\}_{k\geq 3}$ на связный планарный граф накладываются ограничения

$$f_k \leq m_k, k = 3,4, \ldots, s. \tag{2}$$

Тогда также как и при выводе оценки (1), мы получим её аналог для этого общего случая при $j = 1,2, \ldots, v$:

$$\alpha_j \leq \frac{3m_3}{2} + m_4 + \frac{m_5}{2} - 3. \tag{3}$$

Таким образом, максимальная степень вершины не превосходит

$$\frac{3m_3}{2} + m_4 + \frac{m_5}{2} - 3.$$

Но понятно, максимальная степень вершины также определяется и другими членами последовательности $\{m_k\}_{k\geq 3}$, как минимум, значением m_6.

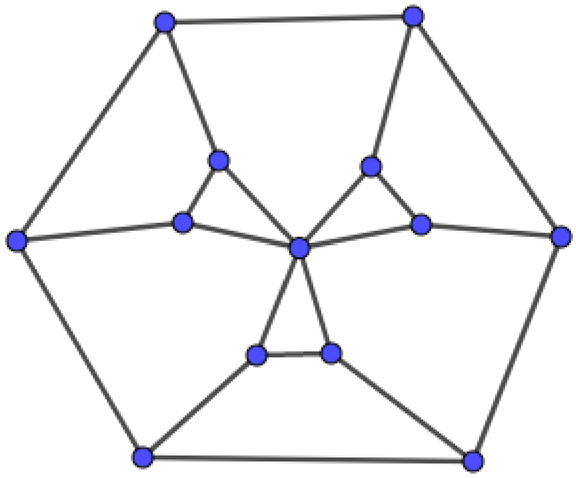
Так, например, не удается построить граф с вектором граней (3,3,3) и с $\alpha_j = 6$ (по крайней мере, я не смог).

Дополнение 3. Предположим существует связный планарный граф, удовлетворяющий условию (2), для которого достигается оценка (3), и кроме того выполнено условие А. Тогда для каждого $q \geq 1$ существуют связный планарный граф, удовлетворяющий условию $f_k \leq m_k + q, k = 3,4,5,6$, $f_k \leq m_k, k = 7, \dots s$ для которого достигается оценка

$$\alpha_j \leq \frac{3m_3}{2} + m_4 + \frac{m_5}{2} + 3q - 3,$$

и кроме того выполнено условие А.

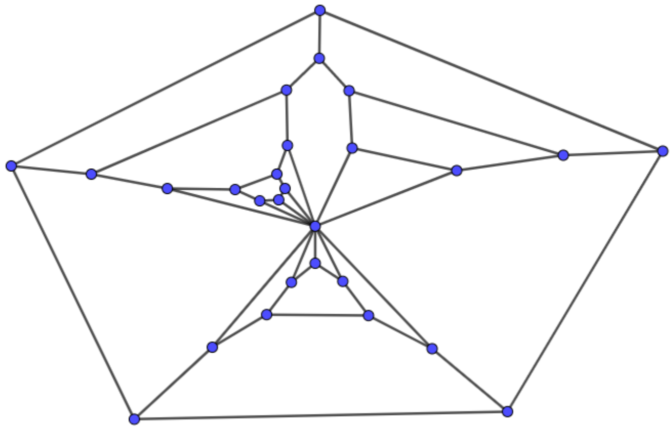
Так, например, имея граф с вектором граней (3,3,3,1) и $\alpha_1 = 6$



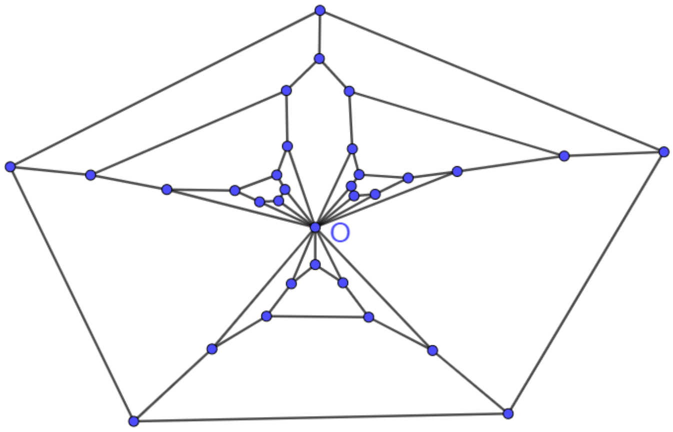
мы можем получить и граф с вектором граней $(3+q, 3+q, 3+q, 1+q), q \geq 1$ и $\alpha_1 = 6 + 3q$. И для всех таких графов достигается оценка (3).

Дополнение 4. При $m = 2,3,4$ построенные графы 3-связны и потому им соответствуют выпуклые многогранники.

При построении графов многогранников классов $m = 5,6$ мы здесь применим описанную процедуру добавления вершин и ребер только в случае, когда вершина O является вершиной треугольной грани, к которой примыкает четырехугольная грань без вершины O – таковые имеются и получим 3-связные планарные графы.



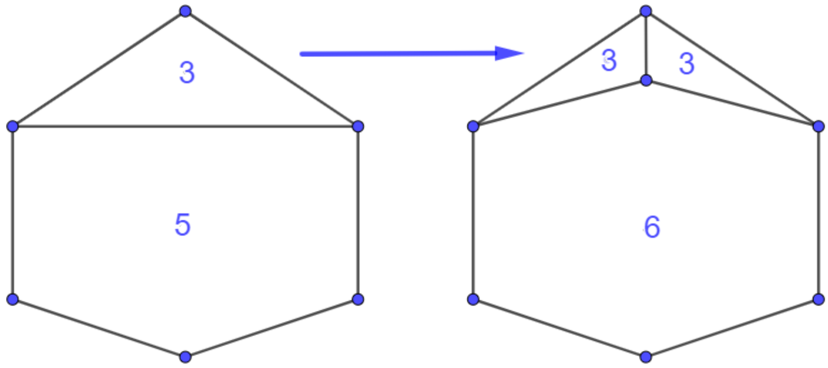
(5,5,5,5)

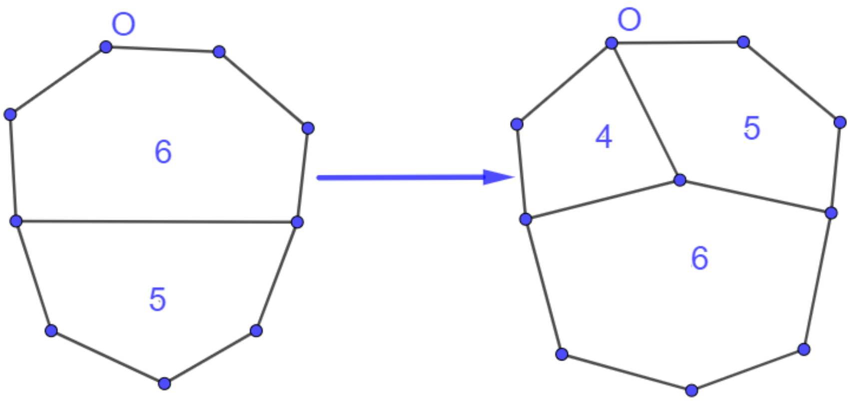


(6,6,6,6)

Таким образом мы имеем выпуклые многогранники, для которых оценка (1) точна при $m = 2,3,4,5,6$.

В нашем построении при $m = 6$ образовался граф, для которого уже нет треугольной грани с вершиной O, к которой примыкает четырехугольная грань без вершины O. Поэтому здесь для получения многогранников при $m > 6$ мы применим другие построения.

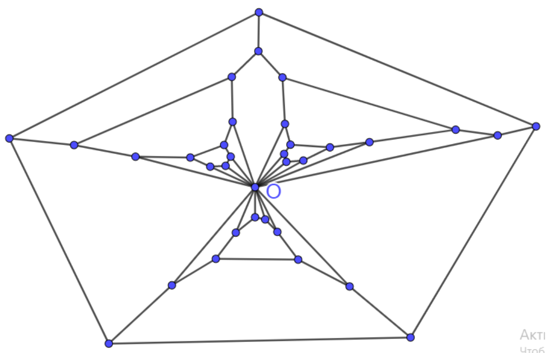




К построенному графу многогранника класса $m = 6$ применим такие трансформации: выбираем треугольную грань с вершиной в точке О, к которой примыкает пятиугольная грань без вершины О и шестиугольную грань с вершиной в точке О, к которой примыкает пятиугольная грань без вершины О и к ним добавляем по одной вершине указанным способом.

Тогда количества треугольных, четырёхугольных и шестиугольных граней увеличиваются на 1, а количество пятиугольных граней уменьшается на 1. А степень вершины O увеличивается на 2.

Получаем планарный 3-связный граф, а значит граф выпуклого многогранника класса 7 с вектором граней (7,7,5,7) и $\alpha_{max} = 17$.



Заметим, что у построенному графу многогранника класса 7 имеются ещё две пары: треугольная грань с вершиной в точке О, к которой примыкает пятиугольная грань без вершины О и шестиугольная грань с вершиной в точке О, к которой примыкает пятиугольная грань без вершины О.

Применим такую же трансформацию ещё один раз и получим граф выпуклого многогранника класса 8 с вектором граней (8,8,4,8) и $\alpha_{max} = 19$.

А затем еще раз и получим граф выпуклого многогранника класса 9 с вектором граней (9,9,3,9) и $\alpha_{max} = 21$.