**ММ267** (7 баллов)

**Вася и Петя поспорили. Вася уверен, что среди представлений натурального числа n в виде суммы натуральных слагаемых чаще встречаются те, у которых каждое слагаемое присутствует не более двух раз, чем те, у которых все слагаемые не кратны 3. Петя уверен в обратном. Кто из них прав?**

Ответ: Прав Петя, а именно - для каждого натурального n количество разложений каждого типа одинаково.

Решение: Рассмотрим ориентированный граф, вершины которого – разложения числа в сумму натуральных слагаемых, и из вершины, содержащей слагаемое 3m, выходит ребро к вершине, у которой это слагаемое заменено на 3 слагаемых, равных m, а остальные слагаемые те же самые. Ясно, что это граф без циклов. Отправляясь от каждой вершины по любому пути, мы всегда придем в одну и ту же вершину, не содержащую слагаемых, кратных 3. Наоборот, все пути в каждую вершину приходят из одной и той же вершины, не содержащей 3 или более одинаковых слагаемых. Таким образом, весь граф оказывается объединением некоторого количества сетей, у каждой из которых есть одна исходящая вершина (не содержащая более 2 одинаковых слагаемых), и одна конечная (не содержащая слагаемых, кратных 3). Некоторые сети содержат по одной вершине (удовлетворяющей обоим свойствам). Все промежуточные вершины в любой из сетей не удовлетворяют ни одному из этих свойств. Таким образом, вершин с каждым из двух свойств – одинаковое число.

Построим граф для числа 7. Его различные разложения (вершины графа) в суммы слагаемых.

А: 1111111

Б: 111112

В: 11113

Г:1114

Д: 115

Е: 16

Ё: 7

Ж:11122

З: 1222

И: 133

Й: 124

К: 1123

Л: 223

М:25

Н: 34

Ребра графа: ВА (слагаемое 3 в В заменено на три единицы в А, остальные слагаемые у них одинаковые), ЕЗ, ИВ, КБ, ЛЖ, НГ

Компонента связности из трех вершин: ИВА, остальные ребра соединяют компоненты связности из двух вершин, остальные вершины - сами себе компоненты связности.

Промежуточная в своей компоненте связности вершина В содержит и более двух одинаковых слагаемых (единицы), и слагаемое, кратное 3 (тройка). Это единственное такое разложение числа 7 (поэтому В - единственная промежуточная в компонентах связности графа). Во всех компонентах связности из более, чем одной вершины, начальная вершина (И, Е, К, Л, Н) - разложение, имеющее не более двух одинаковых слагаемых, но имеющее слагаемое, кратное 3, конечные вершины (А, З, Б, Ж, Г) - разложение, не имеющее слагаемых, кратных 3, но имеющее более двух одинаковых слагаемых. Отдельно стоящие вершины (Д, Ё, Й, М) - не обладают ни слагаемыми, кратными 3, ни более чем двумя одинаковыми слагаемыми. итого по 9 вершин (разложений) каждого из двух типов, указанных в условии задачи.