ММ261

**Конкурсная задача ММ261** (4 балла)

Решения принимаются до 13.03.2021

Натуральные числа 1, 2, 3, …, 100 разбили на 10 групп по 10 чисел. Найти наибольшую возможную сумму НОД этих десяток.

1. Докажем, что количество групп с НОД>1 не может превышать 7 штук.
2. Докажем, что (сумма НОД)>43 невозможно.
3. Докажем, что для (сумма НОД)=43 есть только единственное множество НОД, и это {1.1.1.2.3.5.6.7.8.9}
4. Сделаем построение для НОД={1.1.1.2.3.5.6.7.8.9}, докажем что количество всех возможных вариантов распределения чисел в группах для НОД={3.5.6.7.8.9} всего 18 и покажем все эти 18 вариантов. Докажем что количество всех возможных вариантов распределения чисел в группах для НОД={2.3.5.6.7.8.9} это 18\*С(18, 10),

и вычислим что количество всех возможных вариантов распределения чисел для НОД={1.1.1.2.3.5.6.7.8.9} = 18\*С(18;10)\*30!/(10!^3\*3!)= 2^3\*3^5\*5\*7\*11^2\*13^2\*17^2\*19\*23\*29.

Количество чисел от 1 до 100 у которых имеются некий общий делитель “d” равняется [100/d] где квадратные скобки означают округление снизу.

Значит десять чисел, имеющих некий общий делитель больше 10 в {1; 100} нету.

А значит все НОД должны рассматриваться в промежутке 1\_10

1. Ищем количество чисел от 1 до 100, у которых нету простого делителя в промежутке 2\_10, то есть 1 и все простые числа больше дести и меньше 101

Это 1,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97

Значит их количество=22

1. Ищем количество уникальных чисел для двойки и для тройки, то есть количество чисел в промежутке от 1 до 100 у которых максимальный делитель в промежутке 1\_10 либо 2 либо 3, и группируем их отдельно для 2 и отдельно для 3.

То есть конкретно для двойки само двойка и все простые числа от 11 до 100/2=50 и их количество 1+11=12. Значит у двойки имеются 12 уникальных чисел

Также для 3 количество уникальных чисел это 1+7=8 (так как количество простых чисел в промежутке 11\_33 равняется 7)

1. В сумме (1+количество простых чисел в 11\_100 + количество уникальных для 2 + количество уникальных для 3) получаем, 22+12+8=42 и для (4,5,6,7,8,9,10) остаётся всего 58 чисел, и значит количество групп, у которых величина НОД будет больше 3 (то есть входить в (4,5,6,7,8,9,10)) не может превышать 5 штук.
2. 2 должен присутствовать, так как у него количество уникальных больше 10
3. Если НОД=2 есть только у одной группы, тогда чтобы количество групп с НОД больше 1 было 7, для этого 3 тоже должен присутствовать, так как с НОД из (4,5,6,7,8,9,10) можно создать максимум 5 групп.
4. Из трёх чисел 8,9,10 какой-либо один должен отсутствовать среди множества НОД, так как кратных им всего 29 чисел. Поэтому такая тройка не может присутствовать, так как для тройки нужно хотя бы 30 чисел кратных им.
5. Значит множества групп, которых должны рассмотреть суммой НОД не меньше 43 сузили до 6 вариантов (единицы не пишем)
6. (2,3,5,6,7,9,10) 2) (2,3,5,6,7,8,10) 3) (2,3,5,6,7,8,9)
7. (2,3,4,6,7,9,10) 5) (2,3,4,6,7,8,10) 6) (2,3,4,5,7,9,10)
8. Количество чисел, которые кратны одному из чисел (6,9,10) в 1\_100 всего 29. поэтому такая тройка не может присутствовать, так как для тройки нужно хотя бы 30 чисел кратных им. Значит первая и четвёртая группа исключаются.

Количество чисел кратных (6,8,10) в 1\_100 тоже всего 29, поэтому вторая и пятая группа тоже исключается.

Кратных чисел (5.9.10) тоже 29 чисел, и шестая группа тоже исключается.

И остаётся только третья группа (2.3.5.6.7.8.9)

А теперь сделаем построение для (2.3.5.6.7.8.9)

Для этого, сперва каждой группе (а), приписываем число, которая равна количеству таких натуральных чисел в промежутке 1\_[100/a], которые не кратны c (b/НОД(а,b)), где «b» выше стоящая (больше «а») «НОД десятки» из этого набора НОД.

(То есть ищем количество натуральных чисел в промежутке 1\_100, которое кратно «а», но не кратно не одному «b») («b» - входит в этот набор НОД, и больше «а». (b>a))

9 -> {([100/9]=11)}= 10 +1

8 -> {([100/8]=12)-[100/(9\*8)]}= 10 +1

7 -> {([100/7]=14)-[100/63]-[100/56]}= 10 +2

6 -> {([100/6]=16)-[100/18]-[100/24]-[100/42]+[100/72]}= 10 -4

5 -> {([100/5]=20)-[100/45]-[100/40]-[100/35]-[100/30]+[100/90]}= 10 +2

3 -> {([100/3]=33)-[100/9]-[100/6]+[100/18]-[100/15]+[100/45]+[100/30]-[100/90]-[100/21]+[100/63]+[100/42]}= 10 -2

У (7.8.9) лишних в сумме ровно столько, сколько не хватает для (6), и так как подсчёт вёлся так что каждую группу возможно дополнить только от множество лишних чисел из вышестоящих групп, значит (6) должны дополнить именно из (7.8.9) а конкретно из (7) перенести 2 числа и тут нету выбора, так как таких чисел ровно 2 и это 42 и 84. А из (8. 9) выбор есть именно каких будем переводить в (6). А у (3) не хватает ровно столько, сколько лишнего у (5).

Для перевода из (7) двух чисел в (6) единственный вариант, и это (42,84).

Для перевода из (5) двух чисел в (3) тоже единственный вариант и это (15, 75). (Так как все остальные в более высоких группах, и после пополнения (6) там лишнего не останется, так как там всего 30 чисел, то есть ровно столько, сколько нужно для трёх групп)

Из (8, 9) перевод двух чисел в (6) уже не единственно возможное, и это либо любые два числа из (24, 48, 72, 96) и в этом случае (9) отдаёт 72 в (6,8). И С(4,2)=6 количество вариантов распределений этой четвёрки по два числа между 6 и 8.

Либо (9) отдаёт одно из кратных 18 (но только не 72, так как мы его уже посчитали) именно в (6) а таких чисел всего 4 и это (18, 36, 54, 90). И (8) отдаёт один из оставшихся у него кратных 24 в (6) а таких всего 3 и это (24, 48, 96). И получается кроме упомянутых выше 6 распределении ещё 4\*3=12. А всего 6+12=18 вариантов построении для (3.5.6.7.8.9)

Количество вариантов распределении чисел в группах с НОД = {2.3.5.6.7.8.9} это 18\*С(18, 10) так как для группы с НОД=2 остались 18 чётных чисел.

А общее количество представлении это 18\*С(18, 10) умножается на количество расстановок оставшихся 30 чисел в трёх группах с НОД=1 по 10 чисел. И для НОД=1 получаем 30!/(10!^3\*3!)

9 - 9,27,45,63,81,99 – 18,36,54,72,90

8 - 8,16,32,40,56,64,80,88 – 24,48,72,96

7- 7,14,21,28,35,49,70,77,91,98

6- 6,12,30,42,60,66,78,84 - 18,24,36,48,54,72,90,96

5-5,10,20,25,50,55,65,85,95,100

3 - 3,15,33,39,51,57,69,75,87,93

2-2,22,26,34,38,46,58,62,74,82,

86,94 – 4,44,52,68,76,92

1+1+1+2+3+5+6+7+8+9=43

Здесь конкретно видно, какие возможности построения существует. Для (6.8.9) числа с чёрным шрифтом фиксированные, а множество 18,24,36,48,54,72,90,96. не фиксированное. Из этих 8 цветных чисел, 4 остаются в группе (9), а именно 4 числа из 18,36,54,72,90. В группе (8) остаётся 2 числа из 24,48,72,96. А в группе (6) остаются две оставшихся чисел. То есть, либо в (9) остаются 4 синих чисел, и тогда из множество жёлтых и красного (24,48,72,96.) 2 числа остаются в (8) и 2 числа в (6) и таких вариантов 6. Либо в группе (9) остаются 3 синих и один красный, один синий (из 4 синих) отдаётся в группе (6). А в группе (8) остаются две жёлтых, и один жёлтый (из трёх жёлтых) отдаётся в группе (6). И таких вариантов 4\*3=12. Всего количество вариантов, подходящих распределении чисел (18,24,36,48,54,72,90,96.) по группам (6.8.9) получается 6+12=18.

В конечном итоге получаем: максимальное возможная сумма НОД для 1\_100 это 43, и его можно получить только если множество чисел НОД - (1.1.1.2.3.5.6.7.8.9), при этом представления подмножеств для (3,5,7) единственное, для (6, 8, 9) 18 вариантов распределении между ними чисел (18,24,36,48,54,72,90,96.), но само объединённое множество НОД для (6, 8, 9) тоже единственное. Для 2 имеется 18 оставшихся чётных чисел, а количество всех вариантов представлении для (1.1.1.2.3.5.6.7.8.9) получается 18\*С(18;10)\*30!/(10!^3\*3!)=3\*C(18;10)\*C(30;10)\*C(20;10)=2^3\*3^5\*5\*7\*11^2\*13^2\*17^2\*19\*23\*29

Вот все 18 вариантов множеств {3,5,6,7,8,9}

9 - 9,27,45,63,81,99,18,36,54,90

8 - 8,16,32,40,56,64,80,88,24,48

7- 7,14,21,28,35,49,70,77,91,98

6- 6,12,30,42,60,66,78,84,72,96

5-5,10,20,25,50,55,65,85,95,100

3 - 3,15,33,39,51,57,69,75,87,93

9 - 9,27,45,63,81,99,18,36,54,90

8 - 8,16,32,40,56,64,80,88,24,72

7- 7,14,21,28,35,49,70,77,91,98

6- 6,12,30,42,60,66,78,84,48,96

5-5,10,20,25,50,55,65,85,95,100

3 - 3,15,33,39,51,57,69,75,87,93

9 - 9,27,45,63,81,99,18,36,54,90

8 - 8,16,32,40,56,64,80,88,24,96

7- 7,14,21,28,35,49,70,77,91,98

6- 6,12,30,42,60,66,78,84,48,72

5-5,10,20,25,50,55,65,85,95,100

3 - 3,15,33,39,51,57,69,75,87,93

9 - 9,27,45,63,81,99,18,36,54,90

8 - 8,16,32,40,56,64,80,88,48,72

7- 7,14,21,28,35,49,70,77,91,98

6- 6,12,30,42,60,66,78,84,24, 96

5-5,10,20,25,50,55,65,85,95,100

3 - 3,15,33,39,51,57,69,75,87,93

9 - 9,27,45,63,81,99,18,36,54,90

8 - 8,16,32,40,56,64,80,88,48,96

7- 7,14,21,28,35,49,70,77,91,98

6- 6,12,30,42,60,66,78,84,24, 72

5-5,10,20,25,50,55,65,85,95,100

3 - 3,15,33,39,51,57,69,75,87,93

9 - 9,27,45,63,81,99,18,36,54,90

8 - 8,16,32,40,56,64,80,88,72,96

7- 7,14,21,28,35,49,70,77,91,98

6- 6,12,30,42,60,66,78,84,24,48

5-5,10,20,25,50,55,65,85,95,100

3 - 3,15,33,39,51,57,69,75,87,93

9 - 9,27,45,63,81,99,36,54,72,90

8 - 8,16,32,40,56,64,80,88,24,48

7- 7,14,21,28,35,49,70,77,91,98

6- 6,12,30,42,60,66,78,84,18, 96

5-5,10,20,25,50,55,65,85,95,100

3 - 3,15,33,39,51,57,69,75,87,93

9 - 9,27,45,63,81,99,36,54,72,90

8 - 8,16,32,40,56,64,80,88,24,96

7- 7,14,21,28,35,49,70,77,91,98

6- 6,12,30,42,60,66,78,84,18,48

5-5,10,20,25,50,55,65,85,95,100

3 - 3,15,33,39,51,57,69,75,87,93

9 - 9,27,45,63,81,99,36,54,72,90

8 - 8,16,32,40,56,64,80,88,48,96

7- 7,14,21,28,35,49,70,77,91,98

6- 6,12,30,42,60,66,78,84,18,24

5-5,10,20,25,50,55,65,85,95,100

3 - 3,15,33,39,51,57,69,75,87,93

9 - 9,27,45,63,81,99,18,54,72,90

8 - 8,16,32,40,56,64,80,88,24,48

7- 7,14,21,28,35,49,70,77,91,98

6- 6,12,30,42,60,66,78,84,36, 96

5-5,10,20,25,50,55,65,85,95,100

3 - 3,15,33,39,51,57,69,75,87,93

9 - 9,27,45,63,81,99,18,54,72,90

8 - 8,16,32,40,56,64,80,88,24,96

7- 7,14,21,28,35,49,70,77,91,98

6- 6,12,30,42,60,66,78,84,36,48

5-5,10,20,25,50,55,65,85,95,100

3 - 3,15,33,39,51,57,69,75,87,93

9 - 9,27,45,63,81,99,18,54,72,90

8 - 8,16,32,40,56,64,80,88,48,96

7- 7,14,21,28,35,49,70,77,91,98

6- 6,12,30,42,60,66,78,84,36,24

5-5,10,20,25,50,55,65,85,95,100

3 - 3,15,33,39,51,57,69,75,87,93

9 - 9,27,45,63,81,99,18,36,72,90

8 - 8,16,32,40,56,64,80,88,24,48

7- 7,14,21,28,35,49,70,77,91,98

6- 6,12,30,42,60,66,78,84,54, 96

5-5,10,20,25,50,55,65,85,95,100

3 - 3,15,33,39,51,57,69,75,87,93

9 - 9,27,45,63,81,99,18,36,72,90

8 - 8,16,32,40,56,64,80,88,24,96

7- 7,14,21,28,35,49,70,77,91,98

6- 6,12,30,42,60,66,78,84,54,48

5-5,10,20,25,50,55,65,85,95,100

3 - 3,15,33,39,51,57,69,75,87,93

9 - 9,27,45,63,81,99,18,36,72,90

8 - 8,16,32,40,56,64,80,88,48,96

7- 7,14,21,28,35,49,70,77,91,98

6- 6,12,30,42,60,66,78,84,54,24

5-5,10,20,25,50,55,65,85,95,100

3 - 3,15,33,39,51,57,69,75,87,93

9 - 9,27,45,63,81,99,18,36,54,72

8 - 8,16,32,40,56,64,80,88,24,48

7- 7,14,21,28,35,49,70,77,91,98

6- 6,12,30,42,60,66,78,84,90, 96

5-5,10,20,25,50,55,65,85,95,100

3 - 3,15,33,39,51,57,69,75,87,93

9 - 9,27,45,63,81,99,18,36,54,72

8 - 8,16,32,40,56,64,80,88,24,96

7- 7,14,21,28,35,49,70,77,91,98

6- 6,12,30,42,60,66,78,84,90,48

5-5,10,20,25,50,55,65,85,95,100

3 - 3,15,33,39,51,57,69,75,87,93

9 - 9,27,45,63,81,99,18,36,54,72

8 - 8,16,32,40,56,64,80,88,48,96

7- 7,14,21,28,35,49,70,77,91,98

6- 6,12,30,42,60,66,78,84,90,24

5-5,10,20,25,50,55,65,85,95,100

3 - 3,15,33,39,51,57,69,75,87,93

А множество для НОД=2, любые 10 чисел из {2,22,26,34,38,46,58,62,74,82,86,94,4,44,52,68,76,92}