MM261

Пусть n_k — количество групп с НОД, равным k.

Для антицепи M в $\{1\dots100\}$ (рассматриваемом как частично упорядоченное по отношению делимости) и порожденного ею фильтра $\langle M\rangle$ положим $s_M=\sum_{k\in<M>}n_k$.

Очевидно, $n_k=0$ для $k>10$. Тогда искомая сумма

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}kn_k=\sum_{k=1}^{10}n_k+\sum_{k=2}^{10}n_k+\sum_{k=3}^{10}n_k+\sum_{k=4}^{10}n_k+\\+(n_5+n_9+n_{10})+(n_6+n_8+n_{10})+(n_6+n_9+n_{10})+\\+3n_7+3\,(n_8+n_9+n_{10})=\\=s_{\langle1\rangle}+s_{\langle2,3,5,7\rangle}+s_{\langle3,4,5,7\rangle}+s_{\langle4,5,6,7,9\rangle}+s_{\langle5,9\rangle}+\\+s_{\langle6,8,10\rangle}+s_{\langle6,9,10\rangle}+3s_{\langle7\rangle}+3s_{\langle8,9,10\rangle}.\end{aligned}$$

Несложными вычислениями получаем:

$$\begin{gathered}|\langle1\rangle|=100\\|\langle2,3,5,7\rangle|=78\\|\langle3,4,5,7\rangle|=66\\|\langle4,5,6,7,9\rangle|=58\\|\langle5,9\rangle|=|\langle6,8,10\rangle|=|\langle6,9,10\rangle|=|\langle8,9,10\rangle|=29\\|\langle7\rangle|=14\end{gathered}$$

Отсюда, с учетом очевидной оценки $s_M\leqslant\left[\frac{|\langle M\rangle|}{10}\right]$, имеем:

$$\sum_{k=1}^{10}kn_k\leqslant10+7+6+5+2+2+2+3\cdot1+3\cdot2=43.$$

Пример для этой оценки несложно построить:

2	4	22	26	34	38	44	46	52	58	НОД = 2
3	15	33	39	51	57	69	75	87	93	НОД = 3
5	10	20	25	50	55	65	85	95	100	НОД = 5
6	12	18	24	30	42	60	66	78	84	НОД = 6
7	14	21	28	35	49	70	77	91	98	НОД = 7
8	16	32	40	48	56	64	80	88	96	НОД = 8
9	27	36	45	54	63	72	81	90	99	НОД = 9

и остальные 30 чисел образуют 3 группы с НОД, равным 1.