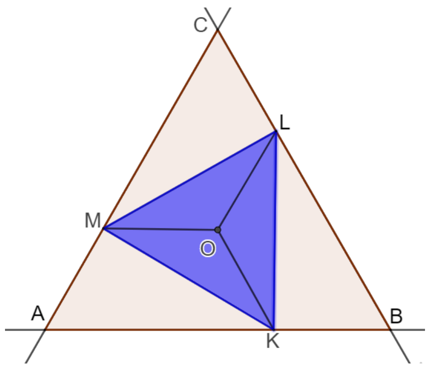
MM 260 (5 баллов)

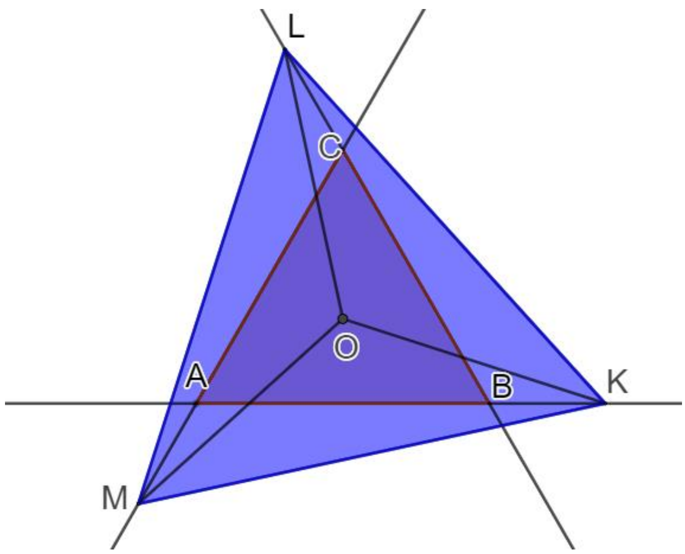
Ответ: 1,3,4 или бесконечно много.

Решение: Поскольку параметр s может принимать и отрицательные значения, то считаем равенства $AK = sAB, BL = sBC, CM = sCA$ равенствами для ориентированных отрезков.

Заметим, что при $s = \frac{1}{2}$ треугольник KLM образован средними линиями треугольника ABC, и потому подобен треугольнику ABC с коэффициентом $\frac{1}{2}$. Таким образом, для произвольного треугольника ABC существует как минимум один подобно вписанный треугольник KLM.

1) Пусть сначала треугольник ABC правильный. Вокруг центра описанной окружности O повернем треугольник ABC на угол в 120 градусов так, что вершины A, B, C после поворота перейдут соответственно в вершины B, C, A.



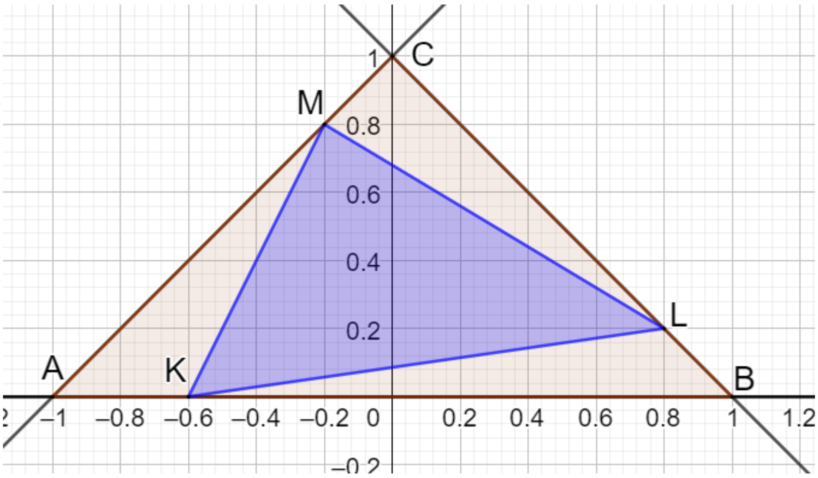


Тогда точки K, L, M перейдут соответственно в точки L, M, K (поскольку длины отрезков AK, BL, CM равны и эти отрезки ориентированы относительно точек A, B, C одинаково). Следовательно, $OK = OL = OM$, и $\angle KOL = \angle LOM = \angle MOK = 120^0$, затем и треугольники KOL, LOM, MOK равны, и тогда равны соответствующие стороны $KL = LM = MK$. Треугольник KLM оказывается правильным и, значит, подобным треугольнику ABC при любом действительном значении параметра $s \neq 0{,}1$.

Таким образом, **для правильного треугольника ABC существует бесконечно много подобно вписанных треугольников KLM**.

2) Рассмотрим равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C. Без ограничения общности считаем $AB = 2$.

Выберем декартову систему координат так, чтобы вершины имели координаты $A(-1{,}0), B(1{,}0), C(0{,}1)$



Последовательно определяем координаты вершин точек K, L, M:

$$K(-1 + 2s, 0), L(1 - s, s), M(-s, 1 - s)$$

затем длины отрезков KL, LM, MK:

$$KL = \sqrt{(2 - 3s)^2 + s^2} = \sqrt{10s^2 - 12s + 4}$$

$$LM = \sqrt{1 + (1 - 2s)^2} = \sqrt{4s^2 - 4s + 2}$$

$$MK = \sqrt{(1 - 3s)^2 + (1 - s)^2} = \sqrt{10s^2 - 8s + 2}$$

Предположим угол $\angle KML = \frac{\pi}{2}$, тогда $KL^2 = LM^2 + MK^2$, и

$$10s^2 - 12s + 4 = 4s^2 - 4s + 2 + 10s^2 - 8s + 2$$

$$4s^2 = 0$$

$$s = 0$$

Предположим угол $\angle MLK = \frac{\pi}{2}$, тогда $MK^2 = LM^2 + KL^2$, и

$$10s^2 - 8s + 2 = 4s^2 - 4s + 2 + 10s^2 - 12s + 4$$

$$4s^2 - 8s + 4 = 0$$

$$s = 1$$

Предположим угол $\angle LKM = \frac{\pi}{2}$, тогда $LM^2 = MK^2 + KL^2$, и

$$4s^2 - 4s + 2 = 10s^2 - 8s + 2 + 10s^2 - 12s + 4$$

$$16s^2 - 16s + 4 = 0$$

$$s = \frac{1}{2}$$

Таким образом, **для равнобедренного прямоугольного треугольника $\boldsymbol{ABC}$ существует ровно один подобно вписанный треугольник $\boldsymbol{KLM}$, а именно при $\boldsymbol{s = \frac{1}{2}}$.**

В дальнейшем мы используем общий подход. Разместим вершины треугольника в точках с координатами $A(-1,0), B(1,0), C(x,y)$, и будем считать, без ограничения общности, $y > 0$.

Последовательно определяем координаты вершин точек K, L, M:

$$K(-1+2s,0), L(1-s(1-x), sy), M(x-s(x+1),(1-s)y) \quad (1)$$

затем длины отрезков KL, LM, MK:

$$KL = \sqrt{(2-3s+sx)^2 + (sy)^2} = \sqrt{((x-3)^2+y^2)s^2 + 4(x-3)s + 4},$$

$$LM = \sqrt{(x-1-2sx)^2 + \left((1-2s)y\right)^2}$$

$$= \sqrt{4(x^2+y^2)s^2 - 4(x^2-x+y^2)s + (x-1)^2 + y^2},$$

$$MK = \sqrt{(x+1-s(x+3))^2 + ((1-s)y)^2} =$$

$$\sqrt{((x+3)^2+y^2)s^2 - 2(x^2+4x+3+y^2)s + (x+1)^2 + y^2} \quad (2)$$

3) Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине $C\left(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$. $AB = 2, CA = \frac{2\sqrt{6}}{3}, BC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Вычисляем KL, LM, MK:

$KL = \frac{2}{3}\sqrt{18s^2 - 24s + 9}$, $LM = \frac{2}{3}\sqrt{9s^2 - 6s + 3}$, $MK = \frac{2}{3}\sqrt{27s^2 - 24s + 6}$

Предположим угол $\angle KML = \frac{\pi}{2}$, тогда $KL^2 = LM^2 + MK^2$, и

$$\frac{4}{9}(18s^2 - 24s + 9) = \frac{4}{9}(9s^2 - 6s + 3) + \frac{4}{9}(27s^2 - 24s + 6)$$

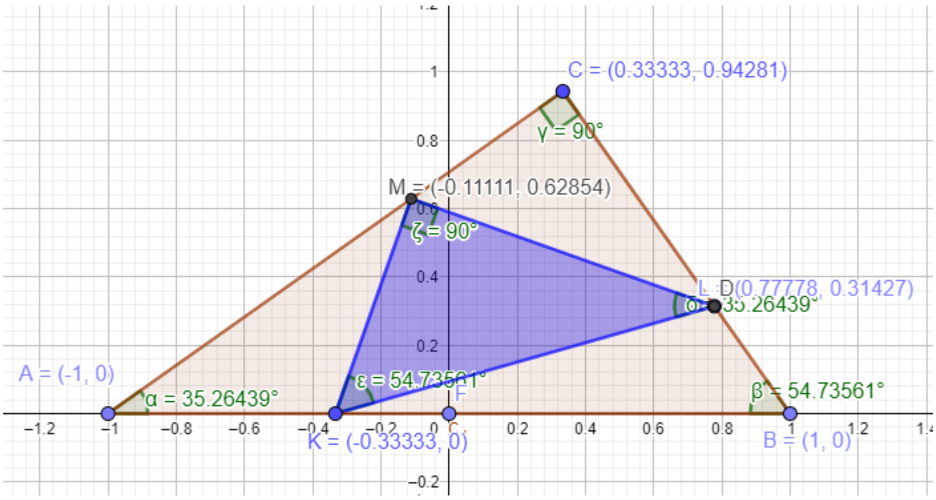
$$\frac{4}{9}(18s^2 - 6s) = 0$$

$$s = 0, \frac{1}{3}$$

Проверяем значение $s = \frac{1}{3}$. $KL = \frac{2\sqrt{3}}{3}, LM = \frac{2\sqrt{2}}{3}, MK = \frac{2}{3}$

$$\frac{MK}{BC} = \frac{LM}{CA} = \frac{KL}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Так что треугольники KLM и ABC подобны с коэффициентом $\frac{\sqrt{3}}{3}$



Предположим угол $\angle LKM = \frac{\pi}{2}$, тогда $LM^2 = KL^2 + MK^2$, и

$$\frac{4}{9}(9s^2 - 6s + 3) = \frac{4}{9}(18s^2 - 24s + 9) + \frac{4}{9}(27s^2 - 24s + 6)$$

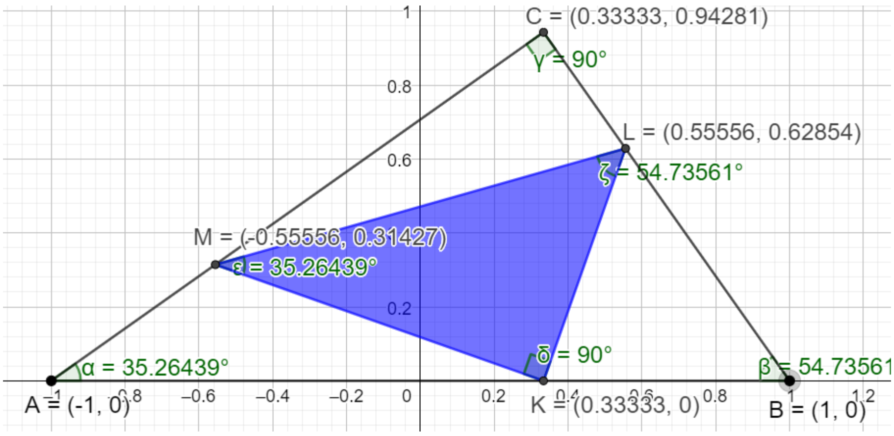
$$\frac{4}{9}(36s^2 - 42s + 12) = 0$$

$$s = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$$

Проверяем значение $s = \frac{2}{3}$. $KL = \frac{2}{3}, LM = \frac{2\sqrt{3}}{3}, MK = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$$\frac{MK}{BC} = \frac{KL}{CA} = \frac{LM}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Так что треугольники KLM и ABC подобны с коэффициентом $\frac{\sqrt{3}}{3}$



Предположим угол $\angle MLK = \frac{\pi}{2}$, тогда $MK^2 = LM^2 + KL^2$, и

$$\frac{4}{9}(27s^2 - 24s + 6) = \frac{4}{9}(9s^2 - 6s + 3) + \frac{4}{9}(18s^2 - 24s + 9)$$

$$\frac{4}{9}(-6s + 6) = 0$$

$$s = 1$$

Таким образом, **для прямоугольного треугольника ABC с прямым углом при вершине $C\left(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ существует ровно три подобно вписанных треугольника KLM: при $s = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$**

4) Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине $C\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$. $AB = 2, CA = \frac{4\sqrt{5}}{5}, BC = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. Вычисляем KL, LM, MK:

$$KL = \frac{2}{5}\sqrt{40s^2 - 60s + 25},\ LM = \frac{2}{5}\sqrt{25s^2 - 10s + 5},$$

$$MK = \frac{2}{5}\sqrt{85s^2 - 80s + 20}$$

Предположим угол $\angle KML = \frac{\pi}{2}$, тогда $KL^2 = LM^2 + MK^2$, и

$$\frac{4}{25}(40s^2 - 60s + 25) = \frac{4}{25}(25s^2 - 10s + 5) + \frac{4}{25}(85s^2 - 80s + 20)$$

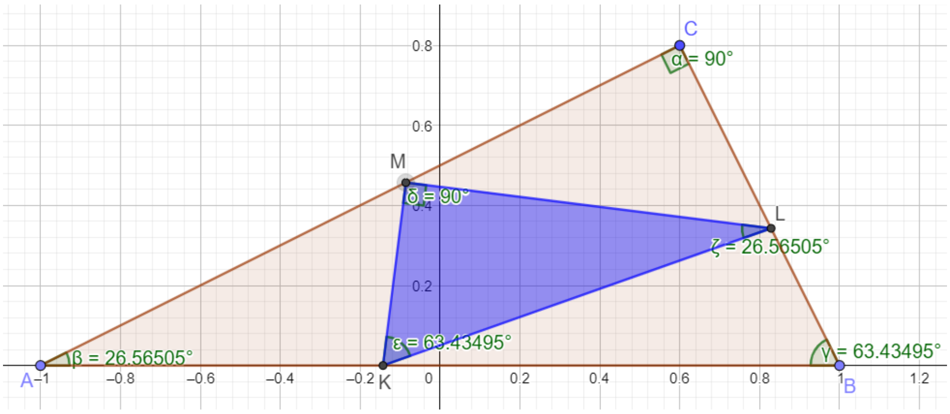
$$\frac{4}{25}(70s^2 - 30s) = 0$$

$$s = 0, \frac{3}{7}$$

Проверяем значение $s = \frac{3}{7}$. $KL = \frac{2\sqrt{13}}{7}, LM = \frac{4\sqrt{65}}{35}, MK = \frac{2\sqrt{65}}{35}$

$$\frac{MK}{BC} = \frac{LM}{CA} = \frac{KL}{AB} = \frac{\sqrt{13}}{7}$$

Так что треугольники KLM и ABC подобны с коэффициентом $\frac{\sqrt{13}}{7}$



Предположим угол $\angle LKM = \frac{\pi}{2}$, тогда $LM^2 = KL^2 + MK^2$, и

$$\frac{4}{25}(25s^2 - 10s + 5) = \frac{4}{25}(40s^2 - 60s + 25) + \frac{4}{25}(85s^2 - 80s + 20)$$

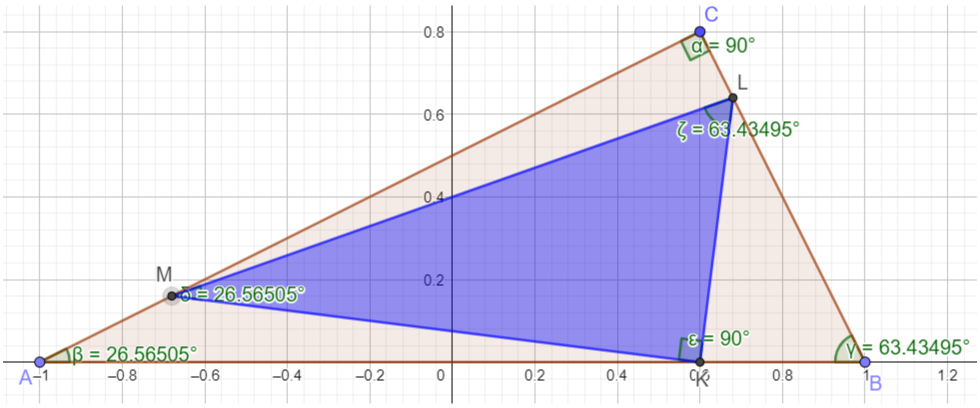
$$\frac{4}{25}(100s^2 - 130s + 40) = 0$$

$$s = \frac{1}{2}, \frac{4}{5}$$

Проверяем значение $s = \frac{4}{5}$. $KL = \frac{2\sqrt{65}}{25}, LM = \frac{2\sqrt{13}}{5}, MK = \frac{4\sqrt{65}}{25}$

$$\frac{KL}{BC} = \frac{MK}{CA} = \frac{LM}{AB} = \frac{\sqrt{13}}{5}$$

Так что треугольники KLM и ABC подобны с коэффициентом $\frac{\sqrt{13}}{5}$



Предположим угол $\angle MLK = \frac{\pi}{2}$, тогда $MK^2 = LM^2 + KL^2$, и

$$\frac{4}{25}(85s^2 - 80s + 20) = \frac{4}{25}(25s^2 - 10s + 5) + \frac{4}{25}(40s^2 - 60s + 25)$$

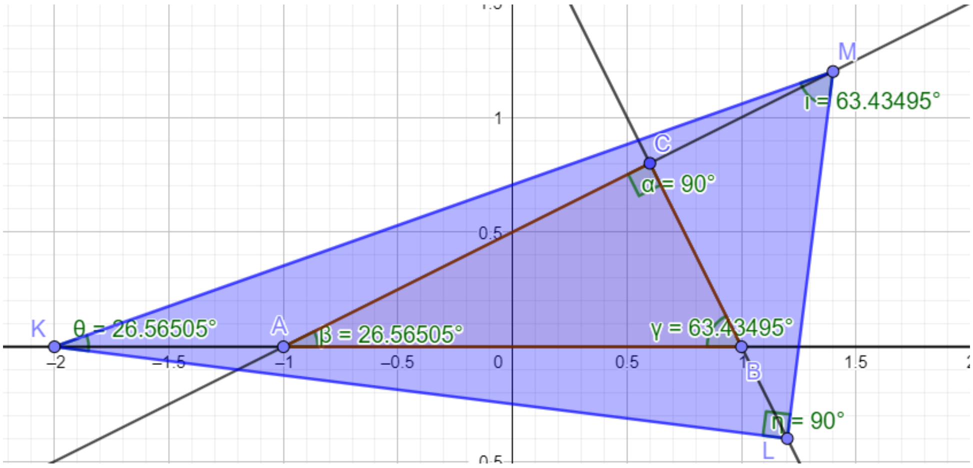
$$\frac{4}{25}(-20s^2 + 10s + 10) = 0$$

$$s = 1, -\frac{1}{2}$$

Проверяем значение $s = -\frac{1}{2}$. $KL = \frac{2\sqrt{65}}{5}, LM = \frac{\sqrt{65}}{5}, MK = \sqrt{13}$

$$\frac{LM}{BC} = \frac{KL}{CA} = \frac{MK}{AB} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

Так что треугольники KLM и ABC подобны с коэффициентом $\frac{\sqrt{13}}{2}$



Таким образом, **для прямоугольного треугольника ABC с прямым углом при вершине $C\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ существует ровно четыре подобно вписанных треугольника KLM: при $s = -\frac{1}{2}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{5}$.**

Покажем, что найденными и указанными значениями исчерпывается множество количеств подобно вписанных треугольников для произвольного треугольника.

Случай равностороннего треугольника мы рассмотрели. Предположим треугольник ABC равнобедренный, и не является равносторонним.

Разместим вершины в точках с координатами $A(-1,0), B(1,0), C(0, y)$,

$y > 0, y \neq \sqrt{3}$. $AB = 2, CA = BC = \sqrt{1+y^2}$

По формулам (1),(2) последовательно определяем координаты точек K, L, M:

$$K(-1+2s, 0), L(1-s, sy), M(-s, (1-s)y),$$

затем длины отрезков KL, LM, MK:

$KL = \sqrt{(9+y^2)s^2 - 12s + 4}$

$LM = \sqrt{4y^2s^2 - 4y^2s + 1 + y^2}$

$MK = \sqrt{(9+y^2)s^2 - 2(3+y^2)s + 1 + y^2}$

Предположим $MK = LM$:

$$(9+y^2)s^2 - 2(3+y^2)s + 1 + y^2 = 4y^2s^2 - 4y^2s + 1 + y^2$$

$$(9-3y^2)s^2 + (2y^2-6)s = 0$$

$$(y^2-3)s(-3s+2) = 0$$

$$y = \pm\sqrt{3}, s = 0, s = \frac{2}{3}$$

Проверяем значение $s = \frac{2}{3}$. $KL = \frac{2y}{3}, LM = MK = \sqrt{9+y^2}/3$.

Предположим $\frac{LM}{BC} = \frac{KL}{AB}$, тогда $LM \cdot AB = KL \cdot BC$ и

$$\frac{2\sqrt{9+y^2}}{3} = \frac{2y}{3}\sqrt{1+y^2}$$

$$9 + y^2 = y^2(1+y^2)$$

$$9 = y^4$$

$$y = \sqrt{3}$$

Невозможно.

Предположим $MK = KL$:

$$(9+y^2)s^2 - 2(3+y^2)s + 1 + y^2 = (9+y^2)s^2 - 12s + 4$$

$$-3 + 6s - 2y^2s + y^2 = 0$$

$$(2s-1)(3-y^2) = 0$$

$$y = \pm\sqrt{3}, s = \frac{1}{2}$$

Получаем единственное уже известное допустимое значение $s = \frac{1}{2}$

Предположим $LM = KL$:

$$4y^2s^2 - 4y^2s + 1 + y^2 = (9 + y^2)s^2 - 12s + 4$$

$$(9 - 3y^2)s^2 + 4(y^2 - 3)s + 3 - y^2 = 0$$

$$(y^2 - 3)(-3s^2 + 4s - 1) = 0$$

$$y = \pm\sqrt{3}, s = 1, \frac{1}{3}$$

Проверяем значение $s = \frac{1}{3}$. $MK = \frac{2y}{3}, LM = KL = \sqrt{9 + y^2}/3$. Получаем те же длины сторон, что и в случае $s = \frac{2}{3}$. Поэтому в этом случае подобно вписанный треугольник также не возникает.

Таким образом, **для равнобедренного треугольника $\boldsymbol{ABC}$ существует ровно один подобно вписанный треугольник $\boldsymbol{KLM}$, а именно при $\boldsymbol{s = \frac{1}{2}}$.**

Перейдем к рассмотрению разностороннего треугольника.

Разместим вершины треугольника в точках с координатами $A(-1,0), B(1,0), C(x, y), y > 0$ и будем считать, без ограничения общности, что $AB > CA > BC$. Так что

$$x > 0, y > 0, (x + 1)^2 + y^2 < 4. \tag{3}$$

Мы уже определили, что

$KL = \sqrt{((x - 3)^2 + y^2)s^2 + 4(x - 3)s + 4},$

$LM = \sqrt{4(x^2 + y^2)s^2 - 4(x^2 - x + y^2)s + (x - 1)^2 + y^2},$

$MK = \sqrt{((x + 3)^2 + y^2)s^2 - 2(x^2 + 4x + 3 + y^2)s + (x + 1)^2 + y^2}$

Предположим угол $\angle LKM = \angle BAC$, тогда $cos\angle LKM = cos\angle BAC = \frac{1+x}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}}$ и поскольку $LM^2 = KL^2 + MK^2 - 2KL \cdot MK \cdot cos\angle LKM$, то выполнено равенство $(KL^2 + MK^2 - LM^2)^2 = 4KL^2MK^2cos^2\angle LKM \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\big(((x - 3)^2 + y^2)s^2 + 4(x - 3)s + 4 + ((x + 3)^2 + y^2)s^2 \\ - 2(x^2 + 4x + 3 + y^2)s + (x + 1)^2 + y^2 - 4(x^2 + y^2)s^2 \\ + 4(x^2 - x + y^2)s - (x - 1)^2 - y^2\big)^2((x + 1)^2 + y^2) \\ = 4(((x - 3)^2 + y^2)s^2 + 4(x - 3)s + 4)(((x + 3)^2 + y^2)s^2 \\ - 2(x^2 + 4x + 3 + y^2)s + (x + 1)^2 + y^2)(1 + x)^2\end{aligned}$$

Данное уравнение относительно s является уравнением четвертой степени. Найдены четыре корня

$$s_1 = 0, s_2 = \frac{-3 + 2x + x^2 + y^2}{x^2 + 6x - 3 + y^2},$$

$$s_3 = \frac{-15 - 10x + x^2 + y^2}{2(x^2 - 6x - 15 + y^2)} + \frac{\sqrt{-10x^2 - 4xy^2 - 36x - 4x^3 + y^4 - 14y^2 + 2x^2y^2 - 15 + x^4}}{2(x^2 - 6x - 15 + y^2)}$$

$$s_4 = \frac{-15 - 10x + x^2 + y^2}{2(x^2 - 6x - 15 + y^2)} - \frac{\sqrt{-10x^2 - 4xy^2 - 36x - 4x^3 + y^4 - 14y^2 + 2x^2y^2 - 15 + x^4}}{2(x^2 - 6x - 15 + y^2)}$$

Заметим, что из условий (3) следует $0 < x < 1, 0 < y < \sqrt{3}$ поэтому

$$-10x^2 - 4xy^2 - 36x - 4x^3 < 0$$

$$y^4 - 14y^2 = y^2(y^2 - 14) < 0$$

$$2x^2y^2 - 15 + x^4 < 6 - 15 + 1 = -8 < 0.$$

Таким образом, подкоренное выражение в области (3) принимает только отрицательные значения, и поэтому корни s_3, s_4 не могут быть действительными.

Предположим угол $\angle MLK = \angle BAC$, тогда $cos\angle MLK = cos\angle BAC = \frac{1+x}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}}$ и поскольку $MK^2 = KL^2 + LM^2 - 2KL \cdot LM \cdot cos\angle MLK$, то выполнено равенство $(KL^2 - MK^2 + LM^2)^2 = 4KL^2LM^2cos^2\angle MLK \Rightarrow$

$$\Big(((x-3)^2 + y^2)s^2 + 4(x-3)s + 4 - ((x+3)^2 + y^2)s^2 + 2(x^2 + 4x + 3 + y^2)s - (x+1)^2 - y^2 + 4(x^2 + y^2)s^2 - 4(x^2 - x + y^2)s + (x-1)^2 + y^2\Big)^2((x+1)^2 + y^2) = 4(((x-3)^2 + y^2)s^2 + 4(x-3)s + 4)(4(x^2 + y^2)s^2 - 4(x^2 - x + y^2)s + (x-1)^2 + y^2)(1+x)^2$$

Для данного уравнения, относительно s являющегося уравнением четвертой степени, найдены четыре корня

$$s_5 = \frac{1}{2}, s_6 = -\frac{4x}{x^2 - 6x - 3 + y^2},$$

$$s_7 = \frac{9 - 2x + x^2 + y^2}{4(x^2 + y^2 + 3)} + \frac{\sqrt{-10x^2 - 4xy^2 - 36x - 4x^3 + y^4 - 14y^2 + 2x^2y^2 - 15 + x^4}}{4(x^2 + y^2 + 3)}$$

$$s_8 = \frac{9 - 2x + x^2 + y^2}{4(x^2 + y^2 + 3)} - \frac{\sqrt{-10x^2 - 4xy^2 - 36x - 4x^3 + y^4 - 14y^2 + 2x^2y^2 - 15 + x^4}}{4(x^2 + y^2 + 3)}$$

В этом случае корни s_7, s_8 также не могут быть действительными в области (3).

Предположим угол $\angle KML = \angle BAC$, тогда $cos\angle KML = cos\angle BAC = \frac{1+x}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}}$ и поскольку $KL^2 = LM^2 + MK^2 - 2LM \cdot MK \cdot cos\angle KML$, то выполнено равенство $(-KL^2 + MK^2 + LM^2)^2 = 4LM^2MK^2cos^2\angle KML \Rightarrow$

$$\begin{aligned}(-((x-3)^2 + y^2)s^2 - 4(x-3)s - 4 + ((x+3)^2 + y^2)s^2 \\ - 2(x^2 + 4x + 3 + y^2)s + (x+1)^2 + y^2 + 4(x^2 + y^2)s^2 \\ - 4(x^2 - x + y^2)s + (x-1)^2 + y^2)^2((x+1)^2 + y^2) \\ = 4(((x+3)^2 + y^2)s^2 - 2(x^2 + 4x + 3 + y^2)s \\ + (x+1)^2 + y^2)(4(x^2 + y^2)s^2 - 4(x^2 - x + y^2)s \\ + (x-1)^2 + y^2)(1+x)^2\end{aligned}$$

$$s_9 = 1, s_{10} = \frac{-3 - 2x + x^2 + y^2}{2(x^2 - 3 + y^2)},$$

$$s_{11} = \frac{3 + 10x + 3x^2 + 3y^2}{4(x^2 + y^2 + 3)} + \frac{\sqrt{-10x^2 - 4xy^2 - 36x - 4x^3 + y^4 - 14y^2 + 2x^2y^2 - 15 + x^4}}{4(x^2 + 6x + 3 + y^2)}$$

$$s_{12} = \frac{3 + 10x + 3x^2 + 3y^2}{4(x^2 + y^2 + 3)}$$
$$- \frac{\sqrt{-10x^2 - 4xy^2 - 36x - 4x^3 + y^4 - 14y^2 + 2x^2y^2 - 15 + x^4}}{4(x^2 + 6x + 3 + y^2)}$$

В этом случае корни s_{11}, s_{12} также не могут быть действительными в области (3).

Далее, проведя такой же анализ уравнения, возникающего при условии, что $\angle LKM = \angle ABC$, и тогда $cos\angle LKM = cos\angle ABC = \frac{1-x}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}$, замечаем, что один из корней равен $s_6 = -\frac{4x}{x^2-6x-3+y^2}$.

В случае, если же $\angle MLK = \angle ABC$, и тогда $cos\angle MLK = cos\angle ABC = \frac{1-x}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}$, замечаем, что один из корней равен $s_{10} = \frac{-3-2x+x^2+y^2}{2(x^2-3+y^2)}$.

А в случае, если же $\angle KML = \angle ABC$, и тогда $cos\angle KML = cos\angle ABC = \frac{1-x}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}$, замечаем, что один из корней равен $s_2 = \frac{-3+2x+x^2+y^2}{x^2+6x-3+y^2}$.

Таким образом, есть всего четыре значения параметра s, при каждом из которых может возникнуть подобно вписанный треугольник KLM:

$$s_2 = \frac{-3 + 2x + x^2 + y^2}{x^2 + 6x - 3 + y^2}, \angle LKM = \angle BAC, \angle KML = \angle ABC \Rightarrow \Delta KML \sim \Delta ABC$$

$$s_6 = -\frac{4x}{x^2 - 6x - 3 + y^2}, \angle MLK = \angle BAC, \angle LKM = \angle ABC \Rightarrow \Delta LKM \sim \Delta ABC$$

$$s_{10} = \frac{-3 - 2x + x^2 + y^2}{2(x^2 - 3 + y^2)}, \angle KML = \angle BAC, \angle MLK = \angle ABC \Rightarrow \Delta MLK \sim \Delta ABC$$

$$s = \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta LMK \sim \Delta ABC$$

Заметим, что в области (3)

$(x+1)^2 + y^2 < 4 \Rightarrow x^2 - 3 + y^2 = ((x+1)^2 + y^2 - 4) - 2x < 0$

$(x+1)^2 + y^2 < 4 \Rightarrow x^2 - 6x - 3 + y^2 = ((x+1)^2 + y^2 - 4) - 8x < 0,$

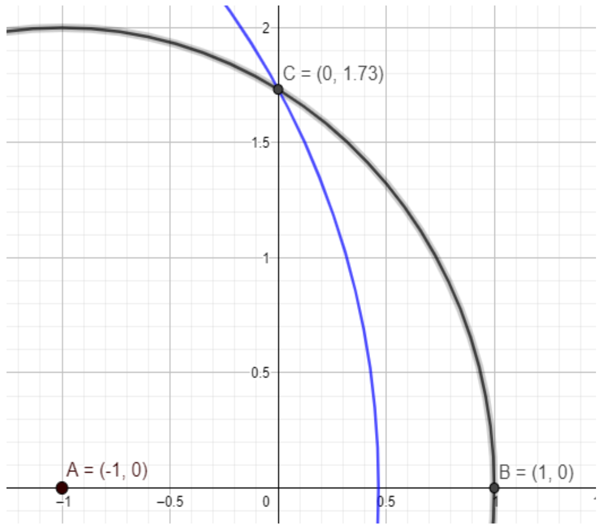
поэтому значения $s_6 = -\frac{4x}{x^2-6x-3+y^2}, s_{10} = \frac{-3-2x+x^2+y^2}{2(x^2-3+y^2)}$ определены для каждой пары (x,y) из области (3) (знаменатели не обращаются в нуль). Кроме того,

$$\frac{1}{2} - s_6 = \frac{x^2+2x+y^2-3}{2(x^2-6x-3+y^2)} = \frac{(x+1)^2+y^2-4}{2(((x+1)^2+y^2-4)-8x)} > 0$$

$$s_{10} - \frac{1}{2} = \frac{-x}{x^2-3+y^2} = \frac{-x}{((x+1)^2+y^2-4)-2x} > 0$$

Так что в области (3) $s_6 < \frac{1}{2} < s_{10}$.

Далее, условие $x^2+6x-3+y^2=0$ определяет окружность $(x+3)^2+y^2=12$ (на рисунке обозначена синим цветом), которая пересекает область (3). И тогда для таких значений (x,y) из области (3) значение $s_2 = \frac{-3+2x+x^2+y^2}{x^2+6x-3+y^2}$ не определено.



Таким образом, **в случае $x>0, y>0, x^2+6x-3+y^2=0$ для треугольника ABC существует ровно три подобно вписанных треугольника KLM, а именно при**

$$\boldsymbol{s = -\frac{4x}{x^2-6x-3+y^2}, \frac{1}{2}, \frac{-3-2x+x^2+y^2}{2(x^2-3+y^2)}}$$

Пусть $x^2+6x-3+y^2<0$. Заметим, что

$$s_2 - s_{10} = \frac{(y^2-3)^2 + x^4 + 6x^2 + 2x^2y^2}{2(x^2-3+y^2)(x^2+6x-3+y^2)} > 0$$

В этом случае $\quad s_6 < \frac{1}{2} < s_{10} < s_2.$

Таким образом, **в случае $\boldsymbol{x > 0, y > 0, x^2 + 6x - 3 + y^2 < 0}$ для треугольника $\boldsymbol{ABC}$ существует ровно четыре подобно вписанных треугольника $\boldsymbol{KLM}$, а именно при**

$$\boldsymbol{s = -\frac{4x}{x^2-6x-3+y^2}, \frac{1}{2}, \frac{-3-2x+x^2+y^2}{2(x^2-3+y^2)}, \frac{-3+2x+x^2+y^2}{x^2+6x-3+y^2}}$$

Пусть $x^2 + 6x - 3 + y^2 > 0$. Заметим, что

$$s_6 - s_2 = -\frac{(y^2-3)^2 + x^4 + 6x^2 + 2x^2y^2}{(x^2-6x-3+y^2)(x^2+6x-3+y^2)} > 0$$

В этом случае $\quad s_2 < s_6 < \frac{1}{2} < s_{10}.$

Таким образом, **в случае $\boldsymbol{x > 0, y > 0, x^2 + 6x - 3 + y^2 > 0, (x+1)^2 + y^2 < 4}$ для треугольника $\boldsymbol{ABC}$ существует ровно четыре подобно вписанных треугольника $\boldsymbol{KLM}$, а именно при**

$$\boldsymbol{s = \frac{-3+2x+x^2+y^2}{x^2+6x-3+y^2}, -\frac{4x}{x^2-6x-3+y^2}, \frac{1}{2}, \frac{-3-2x+x^2+y^2}{2(x^2-3+y^2)}}$$

Заметим, что только в рассмотрениях, основывающихся на анализе наименьшего угла $\angle BAC$, возникают посторонние корни, отбрасывание которых значительно упростило дальнейший анализ.

Приходим к выводу, что **для треугольника $\boldsymbol{ABC}$ количество подобно вписанных треугольника $\boldsymbol{KLM}$ равно одному, трем, четырем или таких подобно вписанных треугольников $\boldsymbol{KLM}$ существует бесконечно много.**