О. Б. Полубасов   21.10.2013 г.

========= ММ190 ==========

Настоящая геометрия

ММ190 (12 баллов)

Решения принимаются, по крайней мере, до 22.12.13

Найти наименьшее возможное число прямых, равноудаленных от всех вершин тетраэдра.

Примечание: под тетраэдром понимается произвольная треугольная пирамида.

========================

Всякий уважающий себя комплекс,
состоит из более простых частей – симплексов,
составленных, в свою очередь, из вертексов.
Михаил Пухов, «Разветвление».

Рассмотрим невырожденный n-мерный симплекс $(0,A_1,..,A_n)$ и пучок гиперплоскостей проходящих через начало координат, $E = (e_1,..,e_n)$ – нормаль к плоскости, $|E| = 1$. Для любой точки X плоскости: скалярное произведение $X*E = 0$.

Проведём через точку $X = (x_1,..,x_n)$ в направлении E прямую (X, E). По теореме Пифагора, квадрат расстояния от прямой до любой точки A равен

$$(A - X)^2 - ((A - X)*E)^2 = (A - X)^2 - (A*E)^2.$$

По условию задачи, квадраты расстояний от прямой до всех точек A_i должны быть одинаковы и равны квадрату расстояния от прямой до начала координат, то есть, равны X^2.

$$(A_i - X)^2 - (A_i*E)^2 = X^2 - 2A_i*X + A_i^2 - (A_i*E)^2 = X^2,\ i = 1..n.$$

Получаем систему из n линейных уравнений от n неизвестных координат точки X:

$$A_i*X = (A_i^2 - (A_i*E)^2)/2,\ i = 1..n. \tag{1}$$

Правую часть системы естественно обозначить через $B = (b_1,..,b_n)$, где

$$2b_i = A_i^2 - (A_i*E)^2 = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 - \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}e_j\right)^2,\ i = 1..n. \tag{2}$$

Детерминант матрицы системы $\Delta = n!V$, где V – ориентированный объём симплекса. Так как симплекс не вырожден, то $V \neq 0$.

Получается, что каковы бы ни были координаты вершин невырожденного симплекса и направление нормали, система всегда имеет единственное решение, то есть, точка X вычисляется однозначно.

Не забудем, что должно выполняться ещё одно уравнение:

$$X*E = 0. \tag{3}$$

По правилу Крамера: $x_i = \Delta_i/\Delta$, следовательно:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i e_i = 0. \tag{4}$$

Завершает набор уравнений ещё одно условие, наложенное на вектор E:

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = 1. \tag{5}$$

Если вектор E выбрать параллельным одному из рёбер симплекса, то проекции на ортогональную гиперплоскость двух вершин, инцидентных этому ребру, совпадут. Через n точек (проекций вершин) всегда можно провести единственную (n-1)-мерную сферу, поэтому вектор E является подходящим, а точка X однозначно вычисляется из системы (1). Количество рёбер у n-мерного симплекса равно C(n+1, 2), никакие два ребра невырожденного симплекса не параллельны, поэтому для любого n-мерного симплекса существует не менее чем C(n+1, 2) искомых прямых. (Если параллельны два смежных ребра симплекса, то три его вершины лежат на одной прямой, а если два несмежных – то четыре вершины лежат в одной плоскости.)

Так как одномерная сфера состоит всего из двух точек, то для любого двухмерного симплекса (треугольника) искомыми прямыми являются три прямые, параллельные сторонам треугольника, и только они. Как известно, на этих прямых лежат средние линии треугольника.

Для самопроверки, выпишем решения явно. **В двухмерном случае** на две переменные e_1 и e_2 наложены два условия:

$$e_1^2 + e_2^2 = 1,$$
$$\Delta_1 e_1 + \Delta_2 e_2 = 0.$$

$$2b_1 = a_{11}^2 + a_{12}^2 - (a_{11}e_1 + a_{12}e_2)^2 = a_{11}^2 + a_{12}^2 - a_{11}^2 e_1^2 - 2a_{11}a_{12}e_1e_2 - a_{12}^2 e_2^2$$
$$= a_{11}^2 e_2^2 + a_{12}^2 e_1^2 - 2a_{11}a_{12}e_1e_2 = (a_{11}e_2 - a_{12}e_1)^2.$$
$$2b_2 = (a_{21}e_2 - a_{22}e_1)^2.$$

$$\Delta_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2.$$
$$\Delta_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

$$2\Delta_1 e_1 + 2\Delta_2 e_2 = 2(a_{11}e_2 - a_{12}e_1)b_2 - 2(a_{21}e_2 - a_{22}e_1)b_1$$
$$= (a_{11}e_2 - a_{12}e_1)(a_{21}e_2 - a_{22}e_1)((a_{12} - a_{22})e_1 - (a_{11} - a_{21})e_2).$$

Приравнивая произведение нулю, получаем три пары решений:

$$E = \pm A_1/|A_1|,\ E = \pm A_2/|A_2|,\ E = \pm(A_1 - A_2)/|A_1 - A_2|.$$

В трёхмерном случае на три переменные e_1, e_2 и e_3 наложены два условия:

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1,$$
$$\Delta_1 e_1 + \Delta_2 e_2 + \Delta_3 e_3 = 0.$$

То есть, решением является пересечение двух поверхностей. Первая поверхность – обычная сфера. Важно, что она окружает начало координат со всех сторон. Вторая поверхность – параболоид третьего порядка. Важно, что она проходит через ноль и простирается на бесконечность по всем координатам. Можно расписать вторую формулу подробнее:

$$2b_1 = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 – (a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3)^2$$
$$= (a_{11}e_2 – a_{12}e_1)^2 + (a_{11}e_3 – a_{13}e_1)^2 + (a_{12}e_3 – a_{13}e_2)^2.$$
$$2b_2 = (a_{21}e_2 – a_{22}e_1)^2 + (a_{21}e_3 – a_{23}e_1)^2 + (a_{22}e_3 – a_{23}e_2)^2.$$
$$2b_3 = (a_{31}e_2 – a_{32}e_1)^2 + (a_{31}e_3 – a_{33}e_1)^2 + (a_{32}e_3 – a_{33}e_2)^2.$$

$$\Delta_1 = a_{22}a_{33}b_1 + a_{13}a_{32}b_2 + a_{12}a_{23}b_3 – a_{23}a_{32}b_1 – a_{12}a_{33}b_2 – a_{13}a_{22}b_3.$$
$$\Delta_2 = a_{23}a_{31}b_1 + a_{11}a_{33}b_2 + a_{13}a_{21}b_3 – a_{21}a_{33}b_1 – a_{13}a_{31}b_2 – a_{11}a_{23}b_3.$$
$$\Delta_3 = a_{21}a_{32}b_1 + a_{12}a_{31}b_2 + a_{11}a_{22}b_3 – a_{22}a_{31}b_1 – a_{11}a_{32}b_2 – a_{12}a_{21}b_3.$$

$$\Delta_1 e_1 + \Delta_2 e_2 + \Delta_3 e_3 =$$
$$= (a_{22}a_{33} – a_{23}a_{32})b_1e_1 + (a_{23}a_{31} – a_{21}a_{33})b_1e_2 + (a_{21}a_{32} – a_{22}a_{31})b_1e_3$$
$$+ (a_{13}a_{32} – a_{12}a_{33})b_2e_1 + (a_{11}a_{33} – a_{13}a_{31})b_2e_2 + (a_{12}a_{31} – a_{11}a_{32})b_2e_3$$
$$+ (a_{12}a_{23} – a_{13}a_{22})b_3e_1 + (a_{13}a_{21} – a_{11}a_{23})b_3e_2 + (a_{11}a_{22} – a_{12}a_{21})b_3e_3.$$

Так как пересечением рассматриваемых поверхностей является не дискретное множество точек, а некоторая непрерывная кривая (возможно, не односвязная), то решений бесконечно много.

В пространствах размерности $n \geq 4$ количество переменных e_i увеличивается, а условия (4) и (5) остаются прежними, так что решений будет уж никак не меньше (достаточно положить $e_n = 0$).

Ответ. Бесконечно много.

Всё-таки, хочется лучше представить себе, как выглядят эти пресловутые кривые на сфере. Был бы я художником – нарисовал бы анимированный гиф, как ось E вращается вокруг вершины тетраэдра. А так, приходится обратиться к цифрам. Рассмотрим случай ортонормированного симплекса. Поскольку система (1) не имеет особенностей, этот случай достаточно полно описывает картину, но при этом уравнения (4) и (5) максимально упрощаются (матрица системы становится единичной):

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1, \tag{6}$$
$$e_1(1 – e_1^2) + e_2(1 – e_2^2) + e_3(1 – e_3^2) = 0. \tag{7}$$

Заменив в уравнении (7) множитель $(1 – e_3^2)$ на $(e_1^2 + e_2^2)$, выразим e_3 через две другие переменные:

$$e_3 = \frac{e_1^3+e_2^3-e_1-e_2}{e_1^2+e_2^2}.$$

Прямые, параллельные рёбрам тетраэдра, дают 12 точек на сфере:
(1, 0, 0), (0, 1. 0), (0, 0, 1), (√2/2, -√2/2, 0), (√2/2, 0, -√2/2), (0, √2/2, -√2/2)
и центрально симметричные им. А как идёт кривая, соединяющая, например, точки (0, -1, 0) и (√2/2, -√2/2, 0)? Оказывается, вот так:

e_1	e_2	e_3
0.00000	-1.00000	-0.00000
0.10938	-0.99000	-0.08908
0.15981	-0.98000	-0.11858
0.20040	-0.97000	-0.13763
0.23585	-0.96000	-0.15091
0.26800	-0.95000	-0.16024
0.29775	-0.94000	-0.16656
0.32566	-0.93000	-0.17043
0.35205	-0.92000	-0.17222
0.37716	-0.91000	-0.17219
0.40114	-0.90000	-0.17055
0.42409	-0.89000	-0.16748
0.44608	-0.88000	-0.16313
0.46717	-0.87000	-0.15763
0.48740	-0.86000	-0.15112
0.50680	-0.85000	-0.14372
0.52538	-0.84000	-0.13556
0.54317	-0.83000	-0.12674
0.56020	-0.82000	-0.11738
0.57648	-0.81000	-0.10759
0.59203	-0.80000	-0.09745
0.60689	-0.79000	-0.08706
0.62109	-0.78000	-0.07650
0.63464	-0.77000	-0.06585
0.64758	-0.76000	-0.05516
0.65994	-0.75000	-0.04449
0.67175	-0.74000	-0.03389
0.68305	-0.73000	-0.02340
0.69385	-0.72000	-0.01306
0.70420	-0.71000	-0.00290
0.70711	-0.70711	-0.00000

Таблица 1.

(Голосом Н. Дроздова): в то время как старшие, добропорядочные переменные монотонно возрастают в заданных им границах, маленькая (по своей абсолютной величине) e_3 пытается выбраться из манежа, но потом заползает обратно.