Задача 19.3'. б) Докажите, что для каждого целого $H \geqslant 4$ уравнение

$$x(y^2 - 2x^2) + Hx + y + 1 = 0 \tag{1}$$

имеет не более пяти решений (x, y) в целых числах.

(*Н. Н. Осипов*)

Решение. Если $x = 0$, то $y = -1$. Пусть далее $x \neq 0$. Тогда

$$x = -\frac{k}{k^2-2} \pm \sqrt{\frac{k-H}{k^2-2} + \frac{2}{(k^2-2)^2}}, \quad y = -kx - 1,$$

где $k = y^2 - 2x^2 + H$ — целое число. При $|k| \geqslant 2$ и $H \geqslant 4$ имеем

$$\frac{k-H}{k^2-2} + \frac{2}{(k^2-2)^2} \leqslant \frac{k-4}{k^2-2} + \frac{2}{(k^2-2)^2}.$$

Но последнее выражение отрицательно при $k \leqslant -2$ и $k \in \{2, 3\}$, а если $k \geqslant 4$, то

$$|x| \leqslant \frac{k}{k^2-2} + \sqrt{\frac{k-4}{k^2-2} + \frac{2}{(k^2-2)^2}} < 1,$$

что невозможно. Следовательно, $k \in \{0, \pm 1\}$. Рассмотрим оставшиеся случаи.

а) Пусть $k = -1$. Тогда

$$x = -1 \pm \sqrt{H+3}.$$

б) При $k = 0$ имеем

$$x = \pm \frac{\sqrt{2H+2}}{2}.$$

в) Наконец, если $k = 1$, то

$$x = 1 \pm \sqrt{H+1}.$$

В каждом из этих случаев мы получим либо два решения, либо ни одного, при этом только случаи а) и б) могут одновременно дать по два решения. Если ещё учесть тривиальное решение $(x, y) = (0, -1)$, то всего решений оказывается не более пяти.

Комментарий. I. Уравнение (1) имеет пять решений при

$$H = 2t^2 - 1,$$

где $t \geqslant 2$таково, что число $2t^2 + 2$ есть точный квадрат. С помощью теории *уравнений Пелля* (см., например, [2]) можно найти, что

$$H \in \{97, 3361, 114241, 3880897, 131836321, \dots\}.$$

II. В случае $H < 0$ утверждение о равномерной ограниченности числа решений уравнения (1) доказать не удалось. Возможно, что это утверждение и неверно, хотя оно выглядит весьма правдоподобным (см. ниже).

При $-10^7 \leqslant H < 0$ с помощью алгоритма из статьи [1] можно найти рекордное значение $H = -1219919$, при котором уравнение (1) имеет семь решений

$$(x,y) \in \{(-782,1563),(-24,-1105),(0,-1),(1,-1105),\\ (1,1104),(23,-1105),(780,-1561)\}.$$

При $-10^{11} \leqslant H < 0$ других значений H, дающих семь или более решений, нет. Другую интересную статистику можно найти по ссылке https://dxdy.ru/topic139910.html.

Отметим, что при $H < 0$ для решений (x,y) уравнения (1) справедлива оценка

$$|x| \leqslant 1 + \sqrt{\frac{|H|+3}{2}}.$$

Эта оценка является точной для

$$H = -2t^2 + 3,$$

где $t \geqslant 2$, так как одним из решений будет $(x,y) = (-t-1, 2t+1)$. При $t = 781$ получим упоминавшееся выше рекордное значение $H = -1219919$.

III. Что ещё можно сказать о числе решений уравнения (1) при $H < 0$?

III$_1$. Поскольку $y+1$ должно делиться на x, любое решение имеет вид

$$(x,y) = (t, st-1), \tag{2}$$

где s, t — некоторые целые числа, $t \neq 0$. Пара (2) будет решением (1) при

$$H = -(s^2-2)t^2 + 2st - s - 1. \tag{3}$$

При условии (3) и $y = st - 1$ уравнение (1) имеет три корня относительно x: это

$$x = t, \quad x = \frac{-t \pm \sqrt{t^2-2s}}{2}.$$

Положим $s = (t^2 - u^2)/2$, где $u = t + 2v$. Тогда

$$H = -4t^4v^2 - 8t^3v^3 - 4t^2v^4 - 4t^2v - 4tv^2 + 2t^2 + 2tv + 2v^2 - 1. \tag{4}$$

При условии (4) уравнение (1) имеет три решения

$$(t, -2tv(t+v)-1), \quad (v, -2tv(t+v)-1), \quad (-t-v, -2tv(t+v)-1).$$

Вместе с тривиальным решением $(0,-1)$ получим по крайней мере четыре решения. При $t = -9$ и $v = -23$ ($H = -175481375$) будет шесть решений.

III$_2$. Рассмотрим условие (3) в частных случаях $t = \pm 1$.

При $t = 1$ имеем

$$H = -s^2 + s + 1,$$

где $s = -2v^2 - 2v$. Вместе с парой $(x,y) = (1, s-1)$ решением уравнения (1) будет и пара

$$(x,y) = (1, -s).$$

Таким образом, при

$$H = -4v^4 - 8v^3 - 6v^2 - 2v + 1$$

уравнение (1) имеет не менее пяти решений. При $v = 21$ ($H = -854699$) и $v = 130$ ($H = -1160117659$) будет шесть решений, а при $v = 23$ ($H = -1219919$) — семь.

Аналогично, при $t = -1$ получим

$$H = -s^2 - 3s + 1,$$

где $s = -2v^2 + 2v$. Вместе с парой $(x, y) = (-1, -s - 1)$ решением будет и пара

$$(x, y) = (-1, s + 2).$$

Таким образом, при

$$H = -4v^4 + 8v^3 + 2v^2 - 6v + 1$$

уравнение (1) имеет не менее пяти решений.

III_3. Рассмотрим теперь условие (3) при $s = \pm 2$.

При $s = 2$ получим

$$H = -2t^2 + 4t - 3,$$

при этом $(x, y) = (t, 2t - 1)$ будет одним из решений уравнения (1). Для упрощения дальнейших формул сделаем замену $t \to t + 1$. Тогда

$$H = -2t^2 - 1$$

и одним из решением будет $(x, y) = (t + 1, 2t + 1)$. Ясно, что

$$(x, y) = (-t + 1, -2t + 1)$$

также является решением. Ещё два решения можно искать в виде $(1, y)$, где

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{8t^2 + 9}}{2}.$$

Существует бесконечно много значений t, при которых оба решения $(1, y)$ будут состоять из целых чисел. Для таких t всего имеется не менее пяти решений. (Можно также искать дополнительную пару решений в виде $(-1, y)$, где

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{8t^2 + 17}}{2}.$$

И здесь существует бесконечно много значений t, дающих решения в целых числах.) При $t = 18$ ($H = -649$) получим шесть решений.

При $s = -2$ всё аналогично: имеем

$$H = -2t^2 - 4t + 1,$$

при этом $(x, y) = (t, -2t - 1)$ будет решением (1). После замены $t \to t - 1$ получим

$$H = -2t^2 + 3$$

и $(x, y) = (t - 1, -2t + 1)$. Ещё одно решение — это $(x, y) = (-t - 1, 2t + 1)$. Дополнительную пару решений снова можно найти в виде $(1, y)$ или $(-1, y)$, где

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{8t^2 - 7}}{2} \quad \text{или} \quad y = \frac{1 \pm \sqrt{8t^2 + 1}}{2}$$

соответственно. При $t = 6$ ($H = -69$) получим шесть решений.

IV. Рассмотрим аналогичное кубическое диофантово уравнение

$$x(y^2 - 2x^2) + x + y + H = 0, \tag{5}$$

где $H \geqslant 1$. Считая $x \neq 0$, положим $k = y^2 - 2x^2 + 1$. Имеем

$$x = -\frac{Hk}{k^2 - 2} \pm \sqrt{\frac{k-1}{k^2-2} + \frac{2H^2}{(k^2-2)^2}}, \quad y = -kx - H. \tag{6}$$

Нетрудно видеть, что если $k \geqslant 2$, то

$$|x| \leqslant H + \sqrt{\frac{H^2+1}{2}},$$

а если $k \leqslant -2$, то

$$|x| < H + \sqrt{\frac{H^2}{2}}.$$

Для оставшихся значений $k \in \{0, \pm 1\}$ имеем

$$x = \pm\sqrt{\frac{H^2+1}{2}}, \quad x = H \pm \sqrt{2H^2}, \quad x = -H \pm \sqrt{2H^2+2}.$$

В итоге приходим к оценке

$$|x| \leqslant H + \sqrt{2H^2+2}, \tag{7}$$

которая достигается при $x = -H - \sqrt{2H^2+2}$. Оценку (7) можно использовать для отыскания всех решений уравнения (5), однако есть более эффективный алгоритм (см. [1]).

Пусть теперь H таково, что

$$H^2 = 2t^2 - 1$$

для некоторого $t \geqslant 1$, т. е.

$$H \in \{1, 7, 41, 239, 1393, 8119, \dots\}.$$

Тогда оценка (7) для решений (x, y) уравнения (5) будет точной. Более того, для таких H при $k \in \{-1, 0, 2\}$ все числа (6) оказываются целыми. Это значит, что для указанных значений H уравнение (5) имеет не менее семи решений. Например, при $H = 239$ имеем

$$\begin{gathered}(x, y) \in \{(-577, -816), (-408, 577), (-169, -239), (-70, -99), (-3, 10),\\ (-2, -11), (-1, -15), (-1, 16), (0, -239), (5, 1),\\ (7, -8), (99, -140), (169, -239)\}\end{gathered}$$

(всего 13 решений). С помощью компьютера можно убедиться, что это значение H является рекордным по числу решений при $1 \leqslant H \leqslant 10^6$. Неизвестно, будет ли число решений уравнения (5) равномерно ограниченным по H.

V. Заинтересованный читатель может самостоятельно исследовать ещё одно кубическое диофантово уравнение

$$x(y^2 - 2x^2) + x + Hy + 1 = 0. \tag{8}$$

В отличие от уравнений (1) и (5), для уравнения (8) построение быстрого алгоритма решения и получение хороших оценок для решений (x, y) является более сложной задачей (см. аналогичный пример 7 из статьи [1]).

(Н. Н. Осипов)

Список литературы

[1] *Osipov N.N., Gulnova B.V.* An algorithmic implementation of Runge's method for cubic diophantine equations // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. 2018. Т. 11. № 2. С. 137—147.

[2] *Barbeau E.J.* Pell's equation. New York: Springer-Verlag, 2003.