

===== MM188 =====

14. Размышления на тему

Ещё раз взглянем на формулы (7) и (8):

$$F_0(k, n) = \sum_{s=n}^{k-1} C(k, s) \sum_{r=1}^n F_r(s, n), \quad (7)$$

$$F_1(k, n) = \sum_{s=n}^{k-1} S(k, s) \sum_{r=2}^n F_r(s, n). \quad (8)$$

Формально можно написать общую формулу:

$$F_m(k, n) = \sum_{s=n}^{k-1} G_m(k, s) \sum_{r=m+1}^n F_r(s, n). \quad (10)$$

$k \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	Σ
0	1							1
1	1	1						2
2	1	2	1					4
3	1	3	3	1				8
4	1	4	6	4	1			16
5	1	5	10	10	5	1		32
6	1	6	15	20	15	6	1	64

Таблица 2. $G_0(k, n) = C(k, n)$.

$k \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	Σ
0	1							1
1	0	1						1
2	0	1	1					2
3	0	1	3	1				5
4	0	1	7	6	1			15
5	0	1	15	25	10	1		52
6	0	1	31	90	65	15	1	203

Таблица 3. $G_1(k, n) = S(k, n)$.

Из формулы (10) вычислим значения G_2 и G_3 .

$k \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	Σ
0	1							1
1	0	1						1
2	0	0	1					1
3	0	0	1	1				2
4	0	0	1	4	1			6
5	0	0	1	20	10	1		32
6	0	0	1	196	105	20	1	323

Таблица 4. $G_2(k, n)$.

$k \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	Σ
0	1							1
1	0	1						1
2	0	0	1					1
3	0	0	0	1				1
4	0	0	0	1	1			2
5	0	0	0	1	5	1		7
6	0	0	0	1	66	15	1	83

Таблица 5. $G_3(k, n)$.

При $m > 1$ комбинаторный смысл чисел $G_m(k, n)$ не ясен. Последовательностей (1,1,1,2,6,32,323) и (1,1,1,1,2,7,83) в OEIS нет. Для угадывания закономерности мало данных. Но можно утверждать, что:

$$G_m(k, k-1) = C(k, k-m-1), \quad k \geq m-1.$$

Если по аналогии с рекуррентными формулами

$$C(k, n) = \sum_{i=n}^k C(i-1, n-1),$$

$$S(k, n) = \sum_{i=n}^k C(k-1, i-1) S(i-1, n-1)$$

построить таблицу $T(k, n) = \sum_{i=n}^k S(k-1, i-1)T(i-1, n-1)$, то некоторые числа в ней совпадут с $G_2(k, n)$, но не все.

k\ n	0	1	2	3	4	5	6	Σ
0	1							1
1	0	1						1
2	0	0	1					1
3	0	0	1	1				2
4	0	0	1	4	1			6
5	0	0	1	14	10	1		26
6	0	0	1	51	79	20	1	152

Таблица 6. $T(k, n)$.

Сумма второго и третьего столбцов – это числа Белла, а сумма всех столбцов (1, 1, 2, 6, 26, 152, 1144, 10742) тоже связана с числами Стирлинга второго рода и известна в OEIS под номером A003659. Больше ничего связанного с таблицей в OEIS найти не удалось, хотя способ построения таблицы прозрачен.

15. Подводная часть айсберга

Если в раскраске не все n -ки красные, то каждая правильная раскраска однозначно определяет ранг каждой m -ки. Но если все n -ки красные, то можно утверждать лишь, что ранг каждой n -ки меньше n , что даёт однозначность только при $n = 1$. При $n > 1$ под красной раскраской могут скрываться m -ки различных рангов. Так как все векторы лежат в одной гиперплоскости, то можно повернуть систему координат так, чтобы последняя координата всех векторов стала равной 0. Исключив эту координату, получим $F(k, n-1)$ правильных раскрасок, ранее скрывавшихся под однотонно красной.

Обозначим: $H(n, k) = 1 + \sum_{i=1}^n (F(k, i) - 1) = \sum_{i=1}^n F(k, i) - n + 1$.

k\ n	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	2					
2	1	4	5				
3	1	8	15	16			
4	1	16	52	67	68		
5	1	32	203	374	405	406	
6	1	64	877	2900	3683	3746	3747

Таблица 7. $H(k, n)$.

Столбец 1 – это степени двойки, столбец 2 – числа Белла, а дальше опять следуют никому не известные числа. А ведь это – количество принципиально различных взаимных расположений k именованных векторов в n -мерном пространстве. Если я не ошибся, конечно.