

Об алгоритмическом решении некоторых кубических диофантовых уравнений

М. А. Сашко, Е. Е. Сысойкова
ekaterinasysoikova@mail.ru

МБОУ СОШ № 10 (Красноярск, Россия)

Санкт-Петербург, 19 мая 2018

Метод Рунге для диофантовых уравнений

Классические диофантовы уравнения

$$f(x, y) = 0 \quad (1)$$

$(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ и $f(x, y)$ — неприводимый многочлен с целыми коэффициентами, $\deg f(x, y) \geq 3$.

- *Mordell L.J.* Diophantine equations. Academic Press, 1969.
- *Спринджук В.Г.* Классические диофантовы уравнения от двух неизвестных. М.: Наука, 1982.

Метод Рунге (Carl Runge, 1887) — один из **эффективных методов** решения диофантовых уравнений (1).

Проблема

Алгоритмическая и компьютерная реализация метода Рунге.

- Стандартная версия метода Рунге использует разложение в **ряд Пюизо** ветвей алгебраической функции $y = \Psi(x)$, определяемой уравнением (1), в точке $x = \infty$.
- Большие константы в общих теоретических оценках для решений (x, y) даже в случае $\deg f(x, y) = 3$.
- В современных системах компьютерной алгебры (*Maple*, *Mathematica* и др.) отсутствуют средства для решения кубических диофантовых уравнений, удовлетворяющих условиям метода Рунге.

Элементарная версия метода Рунге для диофантовых уравнений (1) в случае $\deg f(x, y) \leq 4$

- *Осипов Н.Н.* Элементарная версия метода Рунге для кубических уравнений // Математика в школе. 2012. № 1. С. 64 — 69.
- *Осипов Н.Н.* Метод Рунге для уравнений 4-й степени: элементарный подход // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 19. М.: МЦНМО, 2015. С. 178 — 198.
- *Osipov N.N., Gulnova B.V.* An algorithmic implementation of Runge's method for cubic diophantine equations // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. 2018. Т. 11. № 2. С. 137 — 147.

Кубические диофантовы уравнения частного вида

Конкретная задача в рамках проблемы

Оптимизация и компьютерная реализация элементарной версии метода Рунге в специальных случаях.

Рассматриваются два семейства кубических диофантовых уравнений, зависящих от параметра $H \in \mathbb{Z}$

$$x(y^2 - 2x^2) + Hx + y + 1 = 0 \quad (2)$$

$$x(y^2 - 2x^2) + x + y + H = 0 \quad (3)$$

Основная цель

Дать **быстрый алгоритм** решения диофантовых уравнений (2), (3) и предложить его компьютерную реализацию.

Наивный подход

Будем решать уравнение (2) как квадратное относительно y :

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{D}}{2x}, \quad D = 8x^4 - 4Hx^2 - 4x + 1$$

Поскольку $y \in \mathbb{Z}$, число D должно быть точным квадратом. Однако задача решения диофантова уравнения

$$8x^4 - 4Hx^2 - 4x + 1 = z^2$$

даже при одном конкретном H является очень сложной и не решается элементарными методами.

Ключевая идея

В случае уравнения (2) введем параметр

$$k = y^2 - 2x^2 + H$$

После исключения y получим еще одно уравнение

$$(k^2 - 2)x^2 + 2kx - k + H + 1 = 0 \quad (4)$$

Идея решения диофантова уравнения (2)

Параллельно исследовать два обычных квадратных уравнения: исходное уравнение (2) и новое уравнение (4).

Основной теоретический результат

В случае уравнения (2) положим

$$Q(m) = \frac{m}{m^2 - 2} + \sqrt{\frac{m + |H|}{m^2 - 2} + \frac{2}{(m^2 - 2)^2}}$$

Теорема (основа алгоритма)

Фиксируем $m > \sqrt{2}$. Если $|k| > m$, то для любого решения уравнения (4) справедлива оценка $|x| < Q(m)$.

Идея доказательства

Воспользуемся формулой

$$x = -\frac{k}{k^2 - 2} \pm \sqrt{\frac{k - H}{k^2 - 2} + \frac{2}{(k^2 - 2)^2}}$$

Пусть S — множество решений (x, y) уравнения (2).

Алгоритм решения диофантова уравнения (2)

0. $S = \{(0, -1)\}$.

1. Выбрать $m > \sqrt{2}$.

2. Для каждого $k \in \mathbb{Z}$ с условием $|k| \leq m$ решить уравнение (4) в целых числах и добавить найденные пары

$$(x, y) = (x, -kx - 1)$$

в S .

3. Для каждого $0 \neq x \in \mathbb{Z}$ с условием $|x| < Q(m)$ решить уравнение (2) в целых числах и добавить найденные пары (x, y) в S .

Оптимизация алгоритма I

При оптимизации предложенного алгоритма **управляющий параметр** m следует выбирать так, чтобы общее количество решаемых обычных квадратных уравнений

$$\text{COST}(m) = 2m + 2Q(m)$$

было как можно меньшим.

Оптимальные значения для диофантова уравнения (2)

$$m_{\text{opt}} \sim |H|^{1/4} \text{ и } \text{COST}(m_{\text{opt}}) \sim 4|H|^{1/4} \text{ при } H \rightarrow \infty.$$

Алгоритм при $m = m_{\text{opt}}$ будем называть **оптимизированным алгоритмом**.

Оптимизация алгоритма II

Аналогичный алгоритм решения можно предложить и для диофантова уравнения (3). В этом случае

$$Q(m) = \frac{Hm}{m^2 - 2} + \sqrt{\frac{m+1}{m^2 - 2} + \frac{2H^2}{(m^2 - 2)^2}}$$

а роль уравнения (4) играет уравнение

$$(k^2 - 2)x^2 + 2kHx - k + H^2 + 1 = 0$$

где $k = y^2 - 2x^2 + 1$.

Оптимальные значения для диофантова уравнения (3)

$m_{\text{opt}} \sim H^{1/2}$ и $\text{COST}(m_{\text{opt}}) \sim 4H^{1/2}$ при $H \rightarrow \infty$.

Сопутствующие теоретические результаты I

Теорема (аналитическое решение)

При $H \geq 4$ для каждого решения $(x, y) \neq (0, -1)$ уравнения (2) выполняется одно из следующих равенств:

$$x = -1 \pm \sqrt{H+3}, \quad x = \pm \frac{\sqrt{2H+2}}{2}, \quad x = 1 \pm \sqrt{H+1}$$

Следствие

При $H \geq 4$ уравнение (2) имеет не более пяти решений.

Пять решений будет тогда, когда числа $H+3$ и $2H+2$ будут точными квадратами, т. е. при

$$H \in \{97, 3361, 114241, 3880897, 131836321, \dots\}$$

Сопутствующие теоретические результаты II

Теорема (оценка для решений)

Для решений (x, y) уравнения (3) справедлива оценка

$$|x| \leq H + \sqrt{2H^2 + 2} \quad (5)$$

Оценка (5) является точной для

$$H \in \{1, 7, 41, 239, 1393, 8119, \dots\}$$

Замечание

Алгоритм решения уравнения (3), основанный на оценке (5), значительно проигрывает оптимизированному алгоритму.

Оптимизированный алгоритм решения диофантовых уравнений (2) и (3) был реализован на языке программирования *Python*

Статистика для уравнения (2) при $-10^7 \leq H \leq -1$

$\#(x, y)$	$\#H$
1	9917061
2	71481
3	10999
4	356
5	99
6	3
7	1

7 решений при $H = -1219919$

Статистика для уравнения (3) при $1 \leq H \leq 10^6$

$\#(x, y)$	$\#H$
1	952147
2	43431
3	3589
4	692
5	102
6	24
7	10
8	1
10	2
11	1
13	1

13 решений при $H = 239$

Детали компьютерной реализации

Процессор Intel Core i7-2670QM 2.20GHz–3.1GHz

<i>Задание</i>	<i>Время</i>
10^7 уравнений (2)	≈ 55 мин.
10^6 уравнений (3)	≈ 87 мин.

Открытые вопросы

Пусть $N_{(2)}(H)$ и $N_{(3)}(H)$ — число решений (x, y) диофантовых уравнений (2) и (3). Оптимизированные алгоритмы решения приводят к следующим тривиальным оценкам:

$$N_{(2)}(H) = O(|H|^{1/4}), \quad N_{(3)}(H) = O(|H|^{1/2})$$

Проведенные компьютерные эксперименты показывают, что эти оценки слишком грубы.

Вопросы

- Является ли $N_{(2)}(H)$ равномерно ограниченным при $H < 0$? (При $H > 0$ ответ “Да”.)
- Аналогичный вопрос относительно $N_{(3)}(H)$.

Ответы неизвестны.