

Итерации квадратных радикалов и косинусы дуг, соизмеримых с окружностью

Н. Н. Осипов

e-mail: nnosipov@rambler.ru

§ 1. Пара известных примеров

Первый пример — это одна из задач, предлагавшихся на V Соросовской олимпиаде в 1998 году.

Пример 1. Речь идёт о решении уравнения

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 + x}}} = x.$$

Совершенно неожиданно единственным корнем этого иррационального уравнения оказывается число $x = 2 \cos(2\pi/9)$.

Действительно, так как $0 \leq x \leq 2$, можно сделать *тригонометрическую* замену неизвестного $x = 2 \cos \phi$, где $0 \leq \phi \leq \pi/2$. Тогда

$$\begin{aligned}\sqrt{2 + x} &= 2 \cos \frac{\phi}{2}, & \sqrt{2 - \sqrt{2 + x}} &= 2 \sin \frac{\phi}{4} = 2 \cos \frac{2\pi - \phi}{4}, \\ \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 + x}}} &= 2 \cos \frac{2\pi - \phi}{8}\end{aligned}$$

и уравнение примет вид

$$\cos \frac{2\pi - \phi}{8} = \cos \phi.$$

Отсюда легко находим $\phi = 2\pi/9$. □

Идея тригонометрической замены помогает и в следующем примере.

Пример 2. Пусть требуется решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y = 2, \\ y^2 + z = 2, \\ z^2 + x = 2. \end{cases}$$

Исключив y и z , получим уравнение восьмой степени:

$$x = 2 - (2 - (2 - x^2)^2)^2. \tag{1}$$

Будем искать корни этого уравнения в виде $x = 2 \cos \phi$, где $0 \leq \phi \leq \pi$. Имеем

$$2 - x^2 = -2 \cos 2\phi, \quad 2 - (2 - x^2)^2 = -2 \cos 4\phi, \quad 2 - (2 - (2 - x^2)^2)^2 = -2 \cos 8\phi,$$

поэтому уравнение превращается в $\cos \phi + \cos 8\phi = 0$ или, после преобразований,

$$\cos(9\phi/2) \cos(7\phi/2) = 0.$$

Отсюда находим

$$\phi \in \Phi = \{\pi/9, \pi/7, 3\pi/9, 3\pi/7, 5\pi/9, 5\pi/7, 7\pi/9, \pi\}.$$

Таким образом, мы нашли восемь различных корней уравнения (1), а значит, это и есть все корни этого уравнения. Теперь все решения исходной системы можно представить в виде

$$(x, y, z) = (2 \cos \phi, -2 \cos 2\phi, -2 \cos 4\phi), \quad \phi \in \Phi.$$

§ 2. Новые примеры

Результат примера 1 можно представить в виде равенства

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \dots}}}}} = 2 \cos \frac{2\pi}{9}.$$

Бесконечный вложенный радикал в левой части следует понимать как *предел* последовательности конечных вложенных радикалов (см., например, [1]). Аналогичным способом можно получить и равенство

$$\sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 + \dots}}}}} = 2 \cos \frac{2\pi}{7}.$$

Есть ли другие примеры подобных равенств?

Возьмём целое число $a \geq 2$ и рассмотрим бесконечный вложенный радикал

$$R(a, e_1, e_2, e_3) = \sqrt{a + e_1 \sqrt{a + e_2 \sqrt{a + e_3 \sqrt{a + e_1 \sqrt{a + e_2 \sqrt{a + e_3 \sqrt{\dots}}}}}}}$$

с повторяющимся набором (e_1, e_2, e_3) знаков $e_i \in \{+, -\}$. Будем считать, что этот набор отличен от $(+, +, +)$ и $(-, -, -)$. Число $R(a, e_1, e_2, e_3)$ является единственным корнем уравнения

$$x = \sqrt{a + e_1 \sqrt{a + e_2 \sqrt{a + e_3 x}}}.$$

Очевидно, этот корень находится среди корней уравнения

$$((x^2 - a)^2 - a)^2 - (a + e_3 x) = 0.$$

Обозначим $t = e_3 x$. Имеем

$$((t^2 - a)^2 - a)^2 - (a + t) = (t^2 - t - a)F(t),$$

где дискриминант многочлена $F(t) \in \mathbb{Z}[t]$ равен

$$D(F) = (16a^2 - 4a + 7)^2(4a - 7)^3.$$

Число $D(F)$ будет точным квадратом при $a = a_n$, где

$$a_n = n^2 - n + 2, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Для $a = a_n$ многочлен $F(t)$ допускает разложение

$$F(t) = f_n(t)g_n(t),$$

где кубические многочлены $f_n(x)$ и $g_n(x)$ имеют вид

$$\begin{aligned} f_n(t) &= t^3 + nt^2 - (n^2 - 2n + 3)t - n^3 + 2n^2 - 3n + 1, \\ g_n(t) &= t^3 - (n - 1)t^2 - (n^2 + 2)t + n^3 - n^2 + 2n - 1. \end{aligned}$$

Поскольку $g_n(t) = f_{1-n}(t)$, можно рассматривать только семейство многочленов $f_n(t)$. Таким образом,

$$R(a_n, e_1, e_2, e_3) = e_3 t^*,$$

где t^* — корень либо $f_n(t)$, либо $f_{1-n}(t)$. Более точно, при $n \geq 1$ набор чисел

$$R(a_n, -, -, +), \quad -R(a_n, -, +, -), \quad -R(a_n, +, -, -)$$

является набором корней $f_n(t)$, а набор чисел

$$-R(a_n, +, +, -), \quad R(a_n, +, -, +), \quad R(a_n, -, +, +)$$

есть набор корней $f_{1-n}(t)$.

Теорема 1. *Многочлен $f_n(t)$ неприводим над \mathbb{Z} .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что уравнение

$$t^3 + nt^2 - (n^2 - 2n + 3)t - n^3 + 2n^2 - 3n + 1 = 0$$

неразрешимо в целых числах t, n . Поскольку старшая однородная часть

$$t^3 + nt^2 - n^2t - n^3 = (t - n)(t + n)^2$$

разлагается на множители, можно было бы применить *метод Рунге* (см., например, [2]). Но здесь ещё проще: левая часть уравнения всегда нечётна. \square

Имеем

$$D(f_n) = (4n^2 - 6n + 9)^2,$$

поэтому *группа Галуа* кубического многочлена $f_n(t)$ есть A_3 (см., например, [3], стр. 227), а значит, *абелева*. По *теореме Кронекера — Вебера* (см., например, [4], стр. 357) корни многочлена $f_n(t)$ могут быть выражены через косинусы дуг, соизмеримых с окружностью. Для некоторых n эти выражения можно указать явно.

Для простого числа $p \equiv 1 \pmod{3}$ рассмотрим *гауссову кубическую сумму*

$$G(p, a) = \sum_{k=0}^{p-1} \cos \frac{2\pi a k^3}{p}.$$

Справедлива следующая

Теорема 2. Пусть $n \equiv \pm 1 \pmod{3}$. Предположим, что число

$$p_n = 4n^2 - 6n + 9$$

является простым. Тогда все корни $f_n(t)$ суть числа

$$\frac{\pm G(p_n, \varepsilon_n^j) - n}{3}, \quad j = 0, 1, 2,$$

где ε_n — кубический невычет по модулю p_n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся следующим утверждением (см. [5], стр. 164): если для простого $p \equiv 1 \pmod{3}$ имеет место представление

$$4p = A^2 + 27B^2, \quad (2)$$

где $A \equiv 1 \pmod{3}$, то числа $G(p, \varepsilon^j)$ ($j = 0, 1, 2$), где ε — кубический невычет по модулю p , являются корнями уравнения

$$s^3 - 3ps - Ap = 0.$$

I. Пусть $n \equiv 1 \pmod{3}$. В этом случае для $p = p_n$ имеем (2) при

$$A = 4n - 3, \quad B = 1.$$

Осталось заметить, что при $s = 3t + n$ верно тождество $s^3 - 3ps - Ap = 27f_n(t)$.

II. Пусть $n \equiv -1 \pmod{3}$. В этом случае для $p = p_n$ имеем (2) при

$$A = -4n + 3, \quad B = 1.$$

Теперь при $s = -3t - n$ верно тождество $s^3 - 3ps - Ap = -27f_n(t)$. □

Теорема 3. В условиях предыдущей теоремы можно взять $\varepsilon_n = 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим следующий факт (см. [5], стр. 148): число 2 является кубическим вычетом по модулю p тогда и только тогда, когда справедливо представление

$$p = C^2 + 27D^2. \quad (3)$$

Кроме того, известно, что в представлении (2) числа $|A|$ и $|B|$ определены однозначно. Для $p = p_n$ число $|A| = |4n - 3|$ нечётно, поэтому представление (3) невозможно. □

Приведём примеры явных формул, полученных на основе теорем 2 и 3 ($n = -4$ и $n = 5$):

$$\begin{aligned} \sqrt{22 + \sqrt{22 - \sqrt{22 + \sqrt{22 + \sqrt{22 - \sqrt{22 + \dots}}}}} &= \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{96} \cos \frac{2\pi k^3}{97}, \\ \sqrt{22 + \sqrt{22 - \sqrt{22 - \sqrt{22 + \sqrt{22 - \sqrt{22 - \dots}}}}} &= \frac{5}{3} + \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{78} \cos \frac{2\pi k^3}{79}. \end{aligned}$$

И ещё один пример ($n = 631$), найденный с помощью компьютера:

$$\begin{aligned} \sqrt{397532 + \sqrt{397532 - \sqrt{397532 - \sqrt{397532 + \sqrt{397532 - \sqrt{397532 - \dots}}}}} &= \\ &= 190 + 610 \cos \frac{\pi}{7} - 488 \cos \frac{3\pi}{7}. \end{aligned}$$

Список литературы

- [1] *Вавилов В.В.* Итерации радикалов. М.: Школа им. А. Н. Колмогорова, «Самообразование», 2000.
- [2] *Осипов Н.Н.* Элементарная версия метода Рунге для кубических уравнений // Математика в школе. 2012. № 1. С. 64 — 69.
- [3] *Ленг С.* Алгебра. М.: Мир, 1968.
- [4] *Боревич З.И., Шафаревич И.Р.* Теория чисел. М.: Наука, 1985.
- [5] *Айерлэнд К., Роузен М.* Классическое введение в современную теорию чисел. М.: Мир, 1987.