

Символ Якоби

Во всех задачах этого раздела все переменные предполагаются целочисленными.

22. Докажите, что дробь

$$\frac{x^2 - 2}{2y^2 + 3}$$

не может быть целым числом.

23. Докажите, что если дробь

$$\frac{2x^2 + 1}{y^2 - 2}$$

является целым числом, то $y = \pm 1$.

24. Докажите, что дробь

$$\frac{3x^2 - 1}{8y^2 - 1}$$

при $y \not\equiv 0 \pmod{3}$ не может быть целым числом.

25. ⁵⁾ При каких натуральных n дробь

$$\frac{3^n - 1}{2^n - 1}$$

будет целым числом?

26. ⁶⁾ Let a, b, c, d be positive integers such that $a + b$ and $ad + bc$ are odd. Prove that if $2^a - 3^b > 1$, then $2^a - 3^b$ does not divide $2^c + 3^d$.

27. Докажите, что каждая из дробей

$$\frac{x^2 - 5}{2y^2 \pm 15}$$

не может быть целым числом.

28. ⁷⁾ Существует ли такое натуральное число $n > 5$, что $3^n + 5^n$ делится на $n^2 - 25$?

29. Докажите, что дробь

$$\frac{x^2 + y}{4ay - 1}$$

при $y > 0$ и $a > 0$ не может быть целым числом.

30. Докажите, что при любом натуральном d уравнение

$$x^2 - (d^2 - 1)y^2 = -4d^2 + 1$$

не имеет решений в целых числах x, y .

31. Решите уравнение

$$a^2 + b^2 + c^2 = abc + 2$$

в натуральных числах.

⁵⁾Фольклор.

⁶⁾Problem 3883 in *Cruz Mathematicorum*, 2014, V. 40, № 9.

⁷⁾Российский фестиваль юных математиков (2012).

32. Натуральное число n таково, что

$$3^n \equiv 7 \pmod{n}.$$

Докажите, что n не делится на 127.

33. Натуральное число n таково, что

$$2^n \equiv 3 \pmod{n}.$$

Докажите, что n не делится на 1489.

34. Докажите, что число $5^n - 1$ не делится на $2^n + 1$ ни при каком натуральном n .