Законы Кеплера движения планет

Н. Н. Осипов
Сибирский федеральный университет (Красноярск)
e-mail: nnosipov@rambler.ru

§1. Обозначения

$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP} = (x, y, z)$ — радиус-вектор движущейся материальной точки P

$r = |\boldsymbol{r}|$ — длина радиус-вектора $\boldsymbol{r}$

m — масса точки P

$\boldsymbol{F} = (X, Y, Z)$ — сила, действующая на точку P

$\boldsymbol{v} = \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ — скорость точки P

$v = |\boldsymbol{v}|$ — величина скорости $\boldsymbol{v}$

$\boldsymbol{j} = \dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$ — ускорение точки P

$m\boldsymbol{v}$ — импульс (количество движения) точки P

$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$ — момент импульса точки P

$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ — момент силы $\boldsymbol{F}$

$\dfrac{mv^2}{2}$ — кинетическая энергия точки P

§2. Основные факты

Второй закон Ньютона:

$$m\boldsymbol{j} = \boldsymbol{F}.$$

Его следствия:

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = \boldsymbol{Q}, \quad d\,\frac{mv^2}{2} = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz.$$

Сила $\boldsymbol{F}$ называется центральной, если её действие направлено по радиус-вектору $\boldsymbol{r}$ (точка O является центром силы). Для центральной силы

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{K} = m\boldsymbol{c},$$

где $\boldsymbol{c}$ — постоянный вектор. Отсюда следует, что

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{c} = 0,$$

поэтому движение под действием центральной силы происходит в плоскости, перпендикулярной вектору $\boldsymbol{c}$ (далее это плоскость $z = 0$). В частности, выполняется закон площадей:

$$x\,\frac{dy}{dt} - y\,\frac{dx}{dt} = 2\,\frac{dS}{dt} = c,$$

где S — площадь сектора, $c = |\boldsymbol{c}|$ — удвоенная секторная скорость.

Сила $\boldsymbol{F}$ называется потенциальной, если

$$Xdx + Ydy + Zdz = dU,$$

где U — силовая функция (потенциал). Для потенциальной силы справедлив закон сохранения полной механической энергии:

$$H = \frac{mv^2}{2} - U = \text{const}.$$

Центральная сила вида $\boldsymbol{F} = \dfrac{f(r)}{r}\,\boldsymbol{r}$ потенциальна, так как для неё

$$U = \int f(r)\,dr.$$

§3. Первый закон Кеплера

Определим траекторию движения материальной точки P, притягиваемой неподвижным центром с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния от центра до точки:

$$\boldsymbol{F} = -\frac{\mu m}{r^3}\,\boldsymbol{r}.$$

Здесь $U = \mu m r^{-1}$. В полярных координатах (r, θ) имеем

$$x\,\frac{dy}{dt} - y\,\frac{dx}{dt} = r^2\,\frac{d\theta}{dt}, \quad v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

Закон площадей и закон сохранения энергии примут вид:

$$r^2\,\frac{d\theta}{dt} = c, \quad \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2\mu}{r} + h, \tag{1}$$

где $h = 2H/m$. Пусть $\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{r_0}$, $\boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{v_0}$. Тогда

$$c = r_0 v_0 \sin\alpha, \quad h = v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0},$$

где $r_0 = |\boldsymbol{r_0}|$, $v_0 = |\boldsymbol{v_0}|$, $\alpha \in (0, \pi)$ — угол между $\boldsymbol{r_0}$ и $\boldsymbol{v_0}$. В частности,

$$\mu^2 + hc^2 = \mu^2 - 2\mu r_0 v_0^2 \sin^2\alpha + r_0^2 v_0^4 \sin^2\alpha \geqslant 0,$$

причём $\mu^2 + hc^2 = 0$ тогда и только тогда, когда $\alpha = \pi/2$ и $r_0 v_0^2 = \mu$.

Исключив dt из уравнений (1), получим уравнение

$$c^2\left[\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 + \rho^2\right] = 2\mu\rho + h, \tag{2}$$

где введено обозначение $\rho = r^{-1}$.

I. Предположим, что $\mu^2 + hc^2 = 0$. Тогда

$$\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 = -\left(\rho - \frac{\mu}{c^2}\right)^2.$$

Отсюда следует, что

$$\rho = \frac{\mu}{c^2}, \quad \frac{d\rho}{d\theta} = 0.$$

Значит, точка P равномерно движется по окружности $r = r_0$ (случай круговой орбиты).

II. Пусть теперь $\mu^2 + hc^2 > 0$. Тогда

$$\rho = \frac{\mu}{c^2} + \frac{(\mu^2 + hc^2)^{1/2}}{c^2} \cos(\theta - \theta^*). \tag{3}$$

Действительно, после дифференцирования (2) по θ и сокращения на $d\rho/d\theta$ (считаем, что случай круговой орбиты уже рассмотрен) получим уравнение

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \rho = \frac{\mu}{c^2},$$

откуда $\rho = \mu/c^2 + A\cos(\theta - \theta^*)$. Константу $A > 0$ находим подстановкой в уравнение (2).

Уравнение (3) является уравнением конического сечения

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta^*)}$$

с параметрами

$$p = \frac{c^2}{\mu}, \quad e = \frac{(\mu^2 + hc^2)^{1/2}}{\mu}. \tag{4}$$

Осталось объяснить, как найти *угол перигея* θ^*. Будем считать, что полярная ось направлена по вектору $\boldsymbol{r_0}$. Тогда θ^* можно найти из системы равенств

$$\cos\theta^* = \frac{p - r_0}{r_0 e}, \quad \sin\theta^* = -\frac{p\operatorname{ctg}\alpha}{r_0 e}$$

(фактически достаточно первого равенства и знака $\operatorname{ctg}\alpha$).

§4. Второй закон Кеплера

Это не что иное, как закон площадей, который справедлив для любой центральной силы.

§5. Третий закон Кеплера

Из закона площадей следует, что

$$t = \frac{p^2}{c}\int_0^\theta \frac{d\theta}{(1 + e\cos(\theta - \theta^*))^2}.$$

При $e < 1$ имеем

$$p = \frac{b^2}{a}, \quad e = \frac{(a^2 - b^2)^{1/2}}{a},$$

где $a \geqslant b$ — полуоси эллиптической орбиты. Поэтому

$$T = \frac{p^2}{c} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 + e\cos(\theta - \theta^*))^2} = \frac{p^2}{c} \cdot \frac{2\pi}{(1 - e^2)^{3/2}} = \frac{2\pi ab}{c} = \frac{2\pi}{\mu^{1/2}}\, a^{3/2},$$

откуда находим

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\mu}\, a^3. \tag{5}$$

Таким образом, квадрат времени обращения пропорционален кубу большой полуоси эллипса. Отметим, что равенство

$$cT = 2\pi ab$$

можно вывести непосредственно из закона площадей, так как площадь эллипса с полуосями a и b равна πab.

У Кеплера третий закон движения планет формулируется так: *квадраты времён обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы их средних расстояний от Солнца.* Что Кеплер понимает под «средним расстоянием»?

Справедливы равенства

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + e\cos(\theta - \theta^*)} = (1 - e^2)^{-1/2},$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 + e\cos(\theta - \theta^*))^2} = (1 - e^2)^{-3/2}.$$

Если бы было верно ещё одно равенство

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 + e\cos(\theta - \theta^*))^3} = (1 - e^2)^{-5/2}, \tag{6}$$

то, понимая под «средним расстоянием» величину

$$r_{\text{av}} = \frac{1}{T} \int_0^{T} r\, dt = \frac{p^3}{cT} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 + e\cos(\theta - \theta^*))^3},$$

мы имели бы равенство $r_{\text{av}} = a$. Но равенство (6) верно лишь асимптотически при $e \to 0$, ибо на самом деле

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 + e\cos(\theta - \theta^*))^3} = (1 - e^2)^{-5/2}(1 + e^2/2)$$

и, таким образом,

$$r_{\text{av}} = a\left(1 + \frac{e^2}{2}\right).$$

Поэтому в формулировке Кеплера «среднее расстояние» следует понимать просто как среднее арифметическое минимального $r_{\min}$ и максимального $r_{\max}$ расстояний до Солнца:

$$\frac{r_{\min}+r_{\max}}{2}=a.$$

§6. Дополнение

Короткий вывод уравнения траектории движения, не опирающийся на закон сохранения энергии, можно найти в книге [1, Sec. 2.1].

Второй закон Ньютона приводит к уравнению

$$\boldsymbol{j}=-\frac{\mu}{r^3}\,\boldsymbol{r}. \tag{7}$$

Умножив векторно обе части (7) на $\boldsymbol{r}$, получим

$$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{j}=-\frac{\mu}{r^3}\,(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r})=\boldsymbol{0}.$$

Поскольку

$$\frac{d}{dt}\,(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{j},$$

приходим к равенству

$$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{c},$$

где $\boldsymbol{c}$ — постоянный вектор. Теперь умножим векторно обе части (7) на $\boldsymbol{c}$:

$$\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{j}=-\frac{\mu}{r^3}\,(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r})=-\frac{\mu}{r^3}\,((\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{r})=-\frac{\mu}{r^3}\,(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})-\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}))=-\mu\frac{d}{dt}\,\frac{\boldsymbol{r}}{r}.$$

Имеем

$$\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{j}=\frac{d}{dt}\,\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{v},$$

поэтому после интегрирования получим

$$\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{v}=-\mu\,\frac{\boldsymbol{r}}{r}-\boldsymbol{l}, \tag{8}$$

где $\boldsymbol{l}$ — постоянный вектор.[1] Умножив скалярно на $\boldsymbol{r}$ обе части (8), будем иметь

$$(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{r}=-\mu r-\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{r}$$

или, после упрощения,

$$c^2=\mu r+lr\cos\nu,$$

где $l=|\boldsymbol{l}|$, ν — угол между $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{l}$. Отсюда

$$r=\frac{p}{1+e\cos\nu},$$

где $p=c^2/\mu$, $e=l/\mu$.

[1] Вектор $m^2\boldsymbol{l}$ — это так называемый *вектор Лапласа — Рунге — Ленца* (подробнее см. по ссылке [2]).

§7. Упражнения

1. Докажите, что

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} r\,d\theta = b.$$

Решение. Имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} r\,d\theta = \frac{p}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{1+e\cos(\theta-\theta^*)}\,d\theta = p(1-e^2)^{-1/2} = b.$$

2. Докажите, что

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{mv^2}{2}\,d\theta = \frac{mv_0^2}{2} + \mu m\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r_0}\right).$$

Решение. Имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{mv^2}{2}\,d\theta = \frac{m}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi} v^2\,d\theta = \frac{m}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{2\mu}{r}+h\right)d\theta =$$

$$= \frac{\mu m}{2\pi p}\int\limits_0^{2\pi}(1+e\cos(\theta-\theta^*))\,d\theta + \frac{mh}{2} = \frac{\mu m}{p} + \frac{mh}{2} = \frac{\mu m}{p} + \frac{m}{2}\left(v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}\right) =$$

$$= \frac{mv_0^2}{2} + \mu m\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r_0}\right).$$

3. Докажите, что

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^{T}\frac{mv^2}{2}\,dt = \frac{mv_0^2}{2} + \mu m\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{r_0}\right) = \frac{\mu m}{r_0} - \frac{mv_0^2}{2}.$$

Решение. Имеем

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^{T}\frac{mv^2}{2}\,dt = \frac{m}{2T}\int\limits_0^{T} v^2\,dt = \frac{m}{2T}\int\limits_0^{T}\left(\frac{2\mu}{r}+h\right)dt =$$

$$= \frac{\mu m}{T}\int\limits_0^{T}\frac{dt}{r} + \frac{mh}{2} = \frac{\mu m}{cT}\int\limits_0^{2\pi} r\,d\theta + \frac{mh}{2} = \frac{\mu m}{a} + \frac{m}{2}\left(v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}\right) =$$

$$= \frac{mv_0^2}{2} + \mu m\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{r_0}\right).$$

Далее с помощью формул (4) находим

$$a = \frac{p}{1-e^2} = \frac{r_0\mu}{2\mu - r_0 v_0^2}. \tag{9}$$

Таким образом,
$$\frac{mv_0^2}{2} + \mu m \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r_0}\right) = \frac{\mu m}{r_0} - \frac{mv_0^2}{2}.$$
При желании в последнем выражении μ можно «разменять» на T с помощью равенства (5), которое ввиду (9) превращается в кубическое уравнение относительно μ, а именно:
$$8\mu^3 - \left(\frac{4\pi^2 r_0^3}{T^2} + 12 r_0 v_0^2\right)\mu^2 + 6r_0^2 v_0^4 \mu - r_0^3 v_0^6 = 0.$$
Оно имеет единственный вещественный корень, поскольку, как можно убедиться, его дискриминант отрицателен. В таком случае μ можно найти с помощью формулы Кардано.

Список литературы

[1] *Montenbruck O., Gill E.* Satellite Orbits. Springer, 2000.

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Laplace-Runge-Lenz_vector