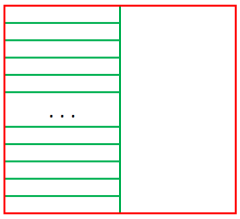
ММ185. *Квадрат со стороной 1 разрезали на 100 прямоугольников с суммой периметров P. Найти диапазон возможных значений P.*

Решение.

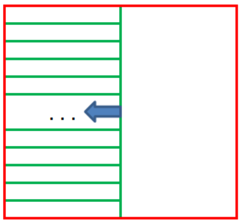
Решаем задачу для произвольного числа прямоугольников n. Каждая сторона любого из этих прямоугольников параллельна одной из сторон квадрата.

В сумму периметров P войдут границы прямоугольников, лежащих на сторонах квадрата и внутри него. Внутренние границы являются общими сразу для 2-х прямоугольников, поэтому сумма внутренних граничных отрезков входит в P с коэффициентом 2, а внешние границы - 1 (их сумма равна 4).

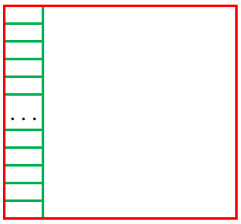
Проведём такое разбиение, сначала вертикальную линию по всему квадрату посередине (можно горизонтальную, а далее проводим вертикальные), а потом левую половину разобьём горизонтальными отрезками на $n-1$ прямоугольник:



Находим нижнюю границу значения P, сдвинем вертикальную линию влево:



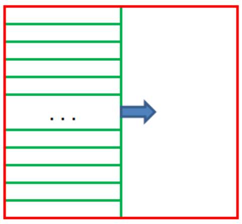
Получаем:



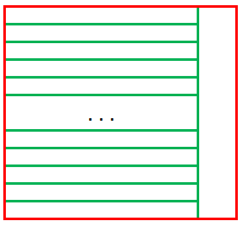
Основания прямоугольников в левой части разбиения можно сделать сколь угодно малыми, тогда сумму всех граничных отрезков внутри квадрата можно сделать сколь угодно близкой к 1. В этом случае $P \approx 4+2\cdot 1 = 6$. *Это и будет нижней (недостижимой) гранью значений* P.

Значение $P < 6$ *получить невозможно, для доказательства рассмотрим отдельно суммы всех горизонтальных и вертикальных граничных отрезков внутри квадрата. Хотя бы одна из этих сумм должна быть не меньше 1, иначе получаем разбиение, в котором будет присутствовать не прямоугольная область (даже не выпуклая).*

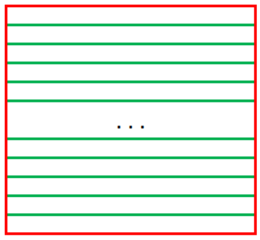
Теперь находим верхнюю границу, сдвигаем исходное разбиение вправо:



Получаем



Основания прямоугольников в левой части разбиения можно сделать сколь угодно близкими к 1, *тогда сумму всех граничных отрезков внутри квадрата можно сделать сколь угодно близкой к* $n-1$. *В этом случае* $P \approx 4+2\cdot(n-1) = 2n+2$. *Это и* *будет верхней гранью значений P. Причём это значение вполне можно получить, если просто "нарезать" прямоугольники слоями:*



Покажем, что большее значение P принять не может. Сначала рассмотрим лемму.

Лемма. *Пусть даны 2 прямоугольника, оба площади S, первый со сторонами a_1 и b_1, второй - a_2 и b_2, т.е. $a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2 = S$. При этом $a_1 > b_1 > 0$, $a_2 \geqslant b_2 > 0$, $a_1 > a_2$, тогда $a_1 + b_1 > a_2 + b_2$, т.е. периметр первого прямоугольника больше.*

Доказательство. *Рассмотрим прямоугольник площади S со стороной x, тогда вторая сторона $\frac{S}{x}$, периметр прямоугольника $P\left(x\right) = 2\left(x + \frac{S}{x}\right)$, $P^{'} = 2\left(1 - \frac{S}{x^2}\right)$, $P^{'} > 0$ при $x > \sqrt{S}$, $P\left(x\right)$ растёт с ростом x при $x > \sqrt{S}$, лемма доказана.*

Теперь вернёмся к единичному квадрату. Пусть нашлось такое разбиение этого квадрата на n прямоугольников, при котором суммарный периметр больше $2n+2$. Находим площади всех прямоугольников, например это будут S_1, S_2, ... , S_n.

$$\sum_{k=1}^{n} S_k = 1$$

Рассмотрим "слоевое" разрезание квадрата, т.е. горизонтальными единичными отрезками. При этом высоту самого верхнего прямоугольника примем равной $h_1 = S_1$, следующего $h_2 = S_2$, и так далее, до $h_n = S_n$,

$$\sum_{k=1}^{n} h_k = 1$$

Таким образом, такое разрезание возможно. Но никакая сторона любого из n прямоугольников не может быть больше

1, тогда сумма периметров при "слоевом" разрезании по крайней мере не меньше соответствующей суммы при первом, она равна $2n + 2$, *т.е. пришли к противоречию.*

Диапазон возможных значений P: $6 < P \leqslant 2\,(n+1)$.
При $n = 100$ *получаем* $6 < P \leqslant 202$.

Можно обобщить решение задачи - разрежем прямоугольник со сторонами a *и* b, *пусть* $a \geqslant b$, *рассуждаем так же как и в случае единичного квадрата, получаем диапазон возможных значений P:*

$$2\,(a + 2b) < P \leqslant 2\,(na + b)$$

Эта оценка верна также для параллелограммов, разрезаемых на n параллелограммов, линии разрезов, конечно, параллельны сторонам исходного параллелограмма.