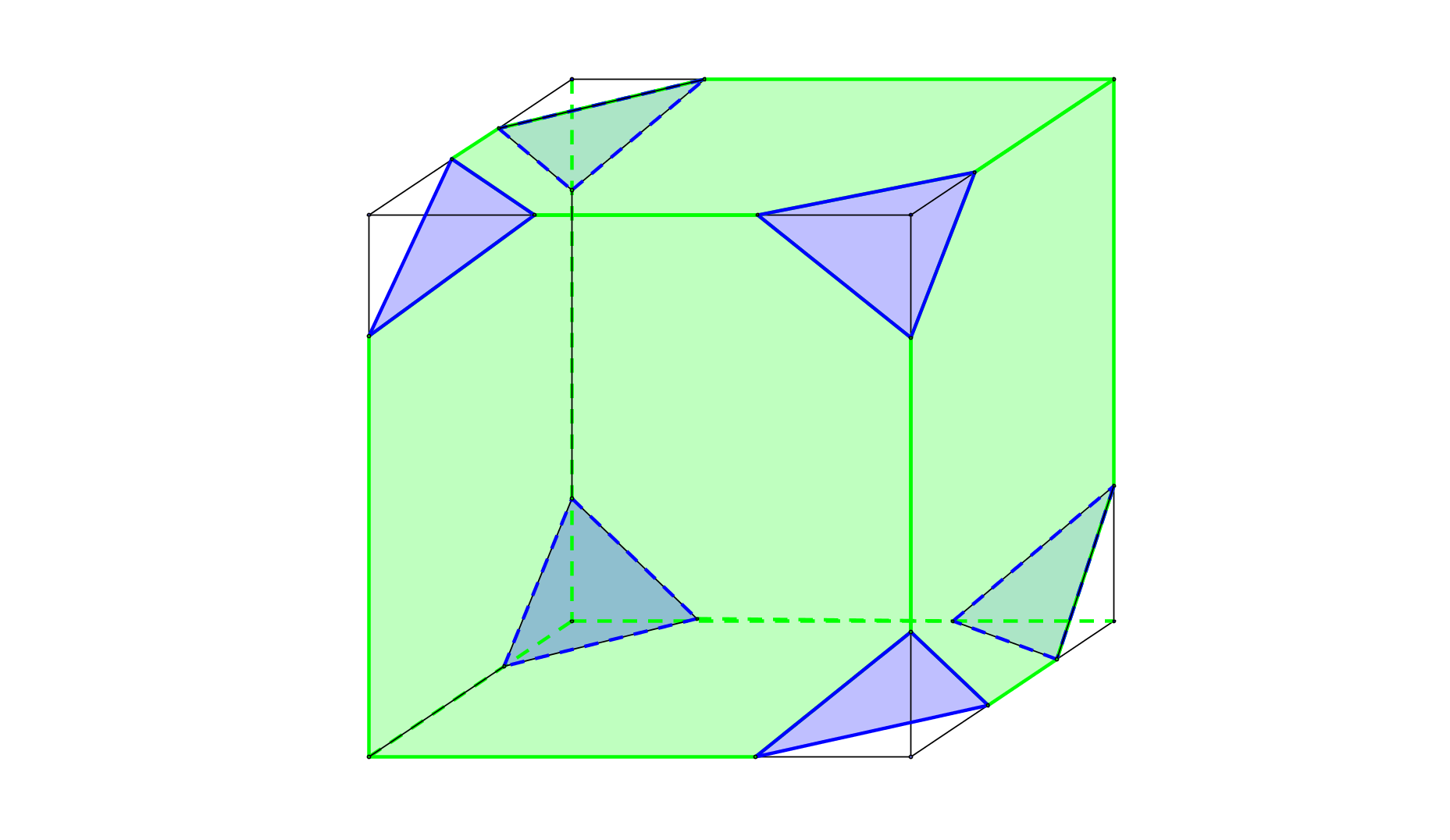
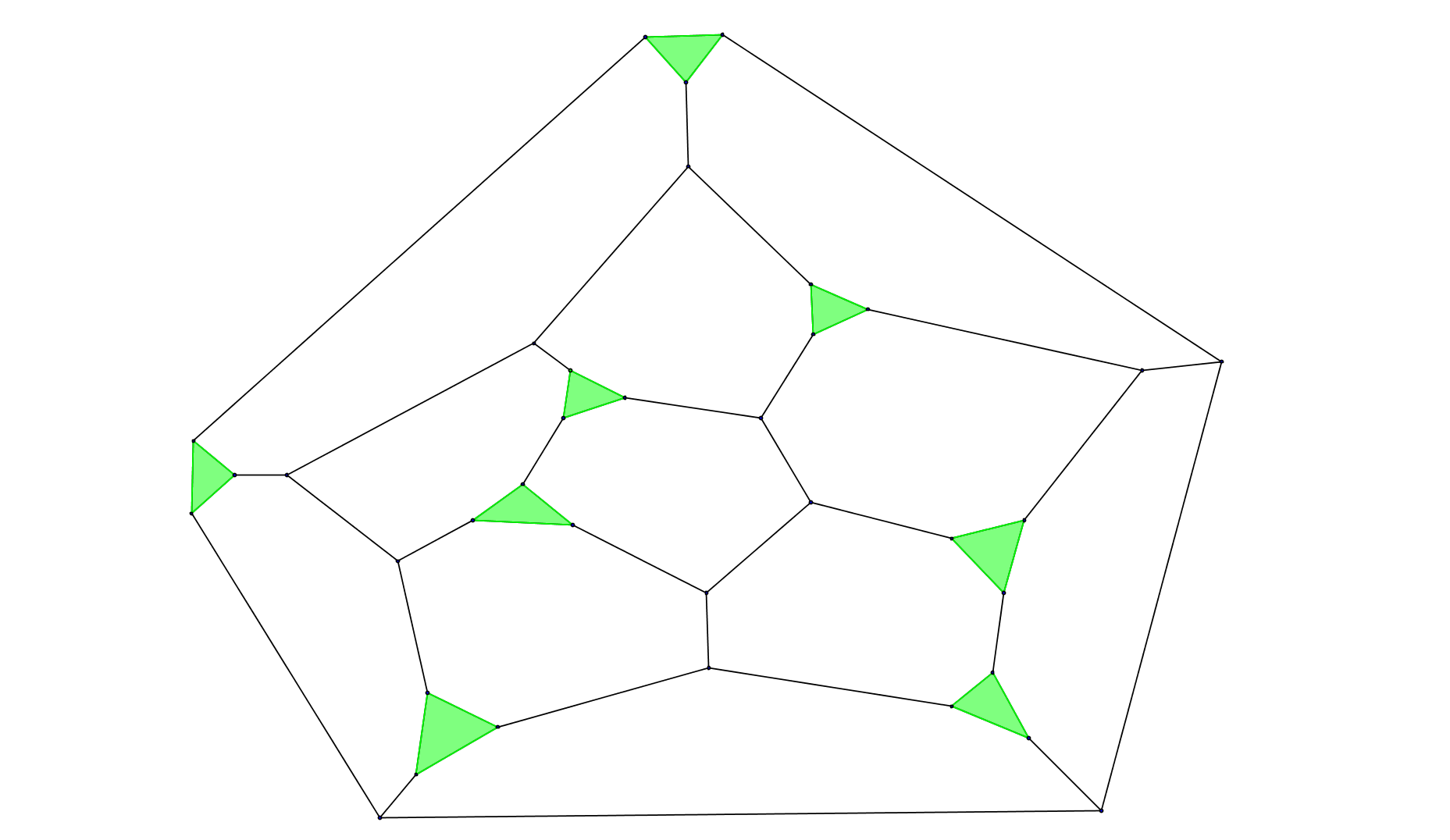
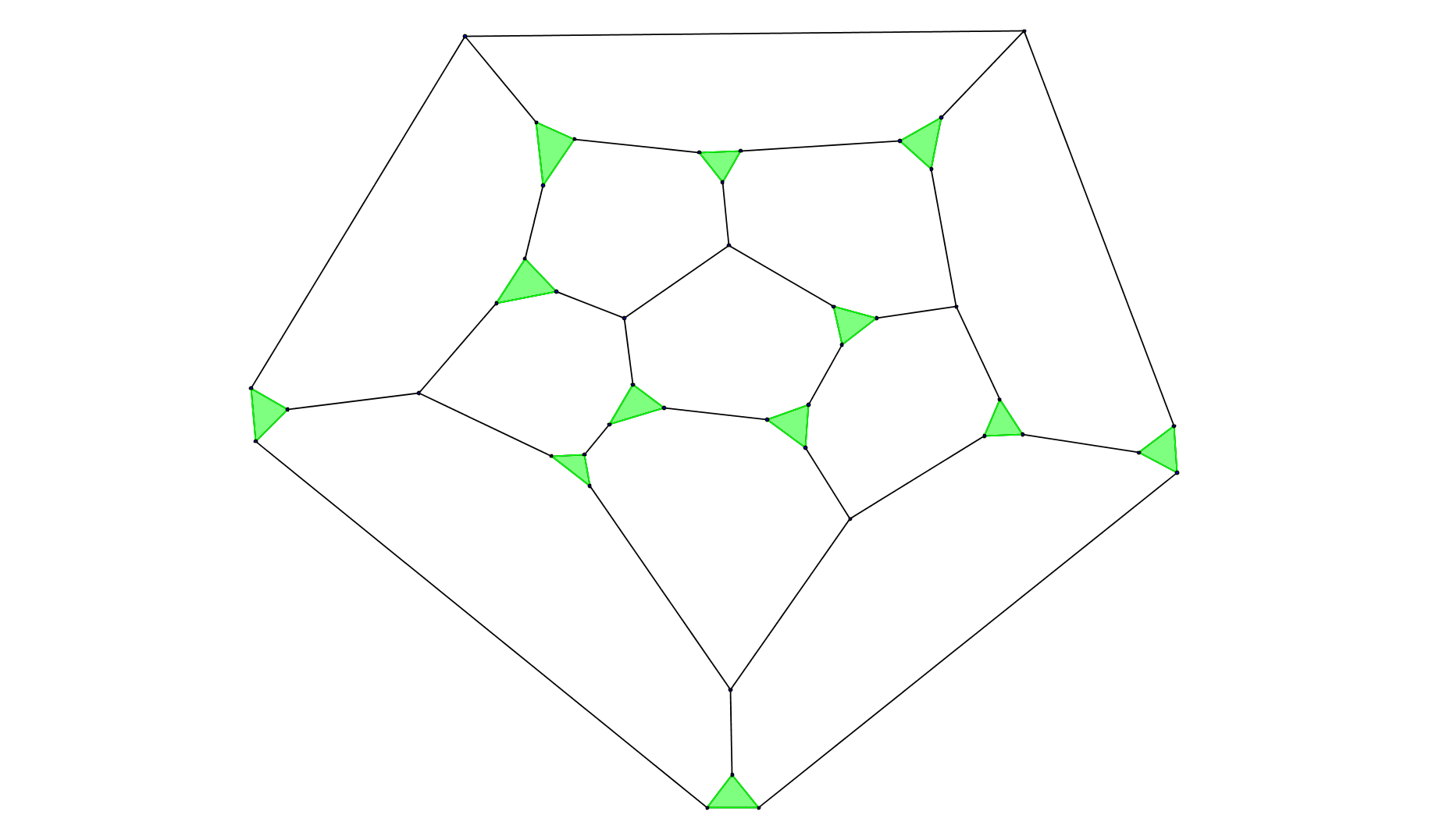
***Задача 239 (5 баллов)***

***Ответ***: а) да, б) да, в) да, г) да, д) нет.

***Решение***: а) Приведем пример многранника с вектором граней . При построении за основу взят куб, затем возле шести вершин отрезаем по треугольной пирамиде.

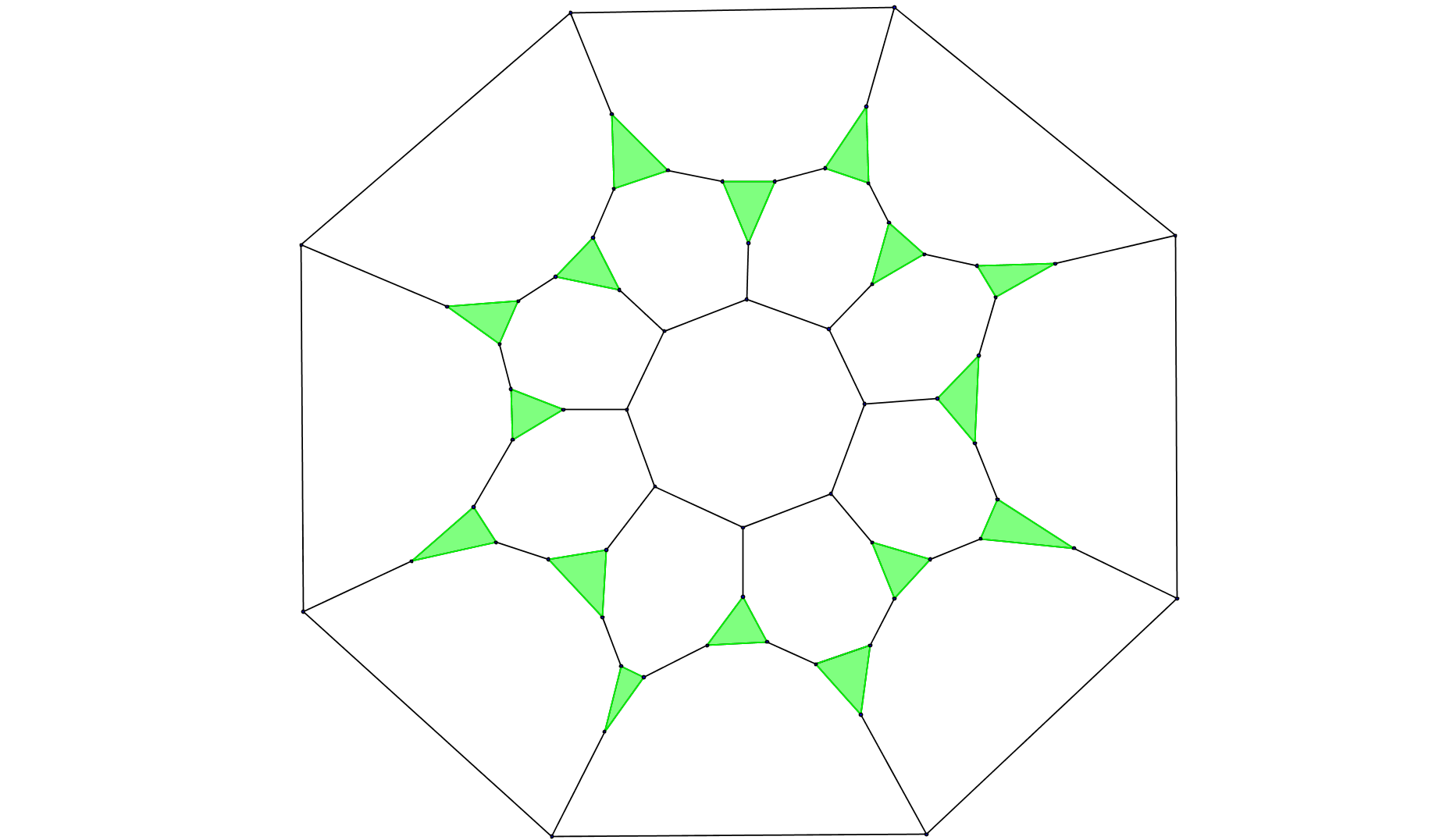
б) в) Также приведем соответствующие графы многогранников с векторами граней 

и



За основу взят правильный додекаэдр, у которого возле некоторых вершин отрезаем по треугольной пирамиде. В результате образуются новые треугольные грани, на рисунке указанные зелёным цветом.

г)



Приведем соответствующий граф многогранника с вектором граней

Пусть у выпуклого многогранника вектор граней , тогда для количества рёбер имеем . Из теоремы Эйлера для выпуклых многогранников следует для количества вершин :

. (1)

В каждой вершине сходятся не меньше трёх рёбер, поэтому , а с учётом (1) получаем . И значит,

*,*

то есть

(2)

Далее, при некотором определим . Тогда

,

и после подстановки в (2) получаем

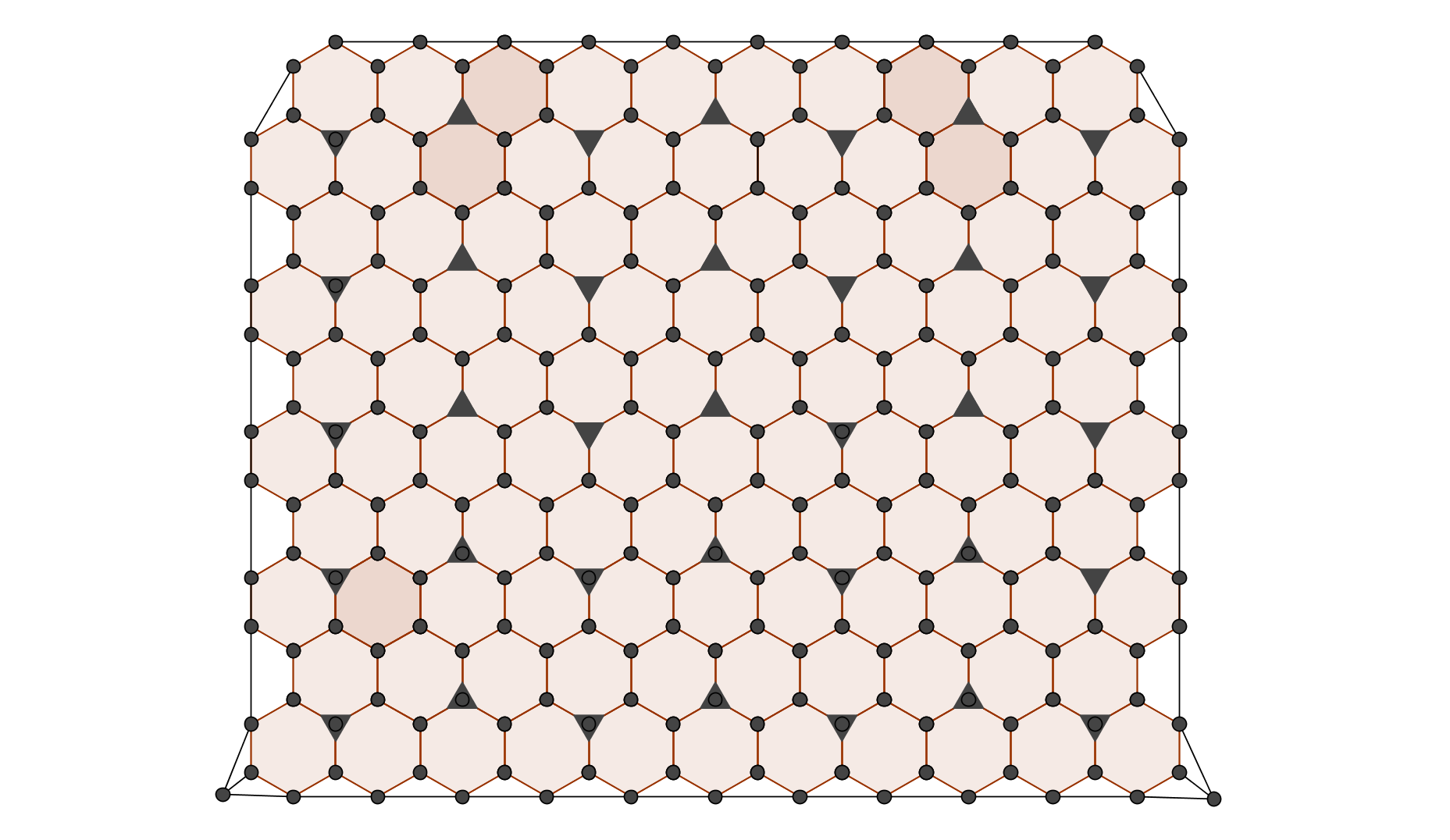
(3)

Левая часть неравенства положительна, тогда, как минимум, один из коэффициентов в (3) также должен быть положительным. Следовательно, , и поэтому

(4)

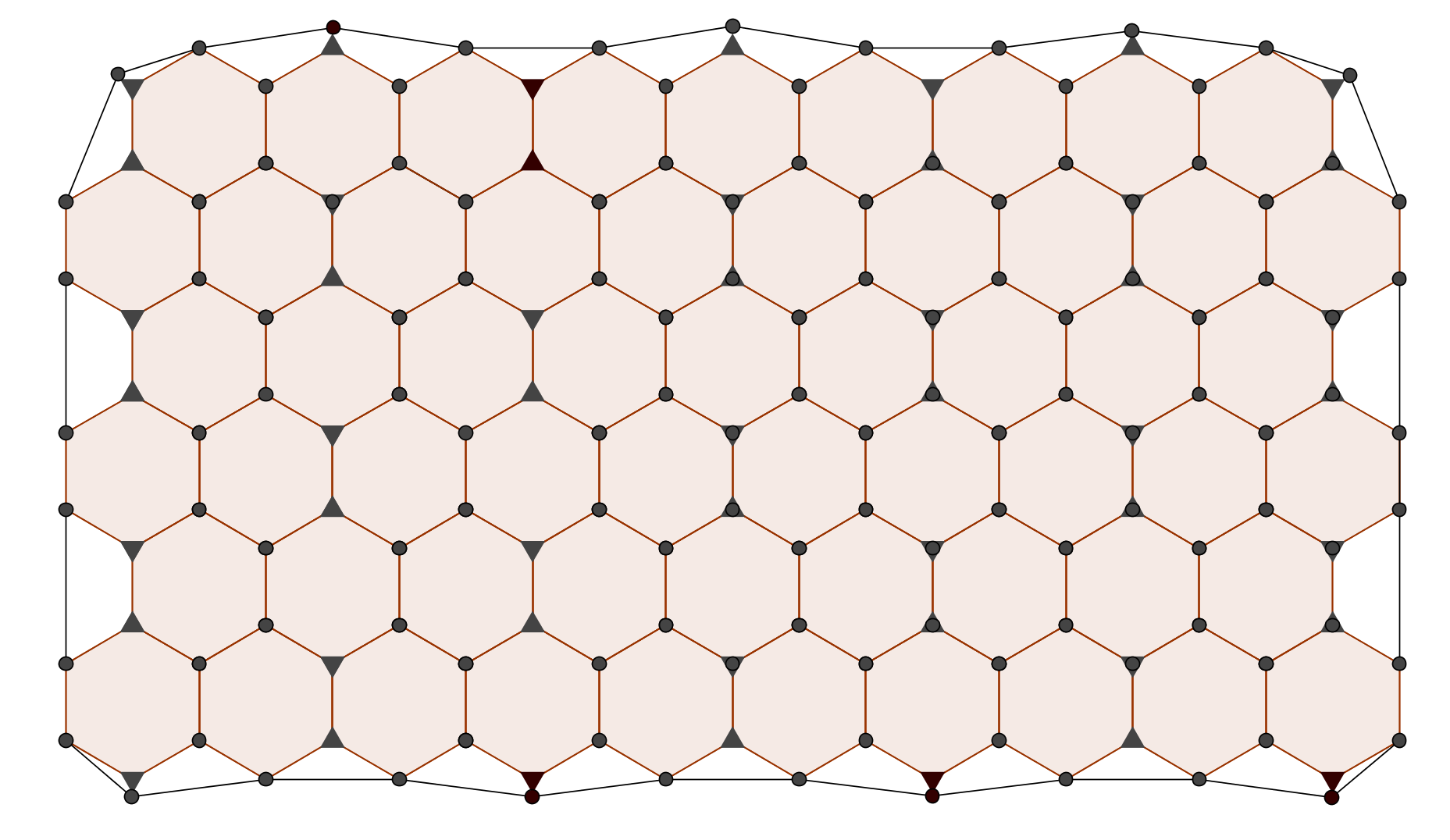
д) При оценка (4) имеет вид . Значит, в любом выпуклом многограннике количество девятиугольных граней меньше количества остальных граней, и ответ в этом пункте отрицательный.

Рассмотрим многогранник, граф которого содержит рядов, содержащих семиугольных граней (на рисунке обозначены фиолетовым), треугольных граней (чёрным цветом), а также граней по периметру картинки (на рисунке ). Тогда и

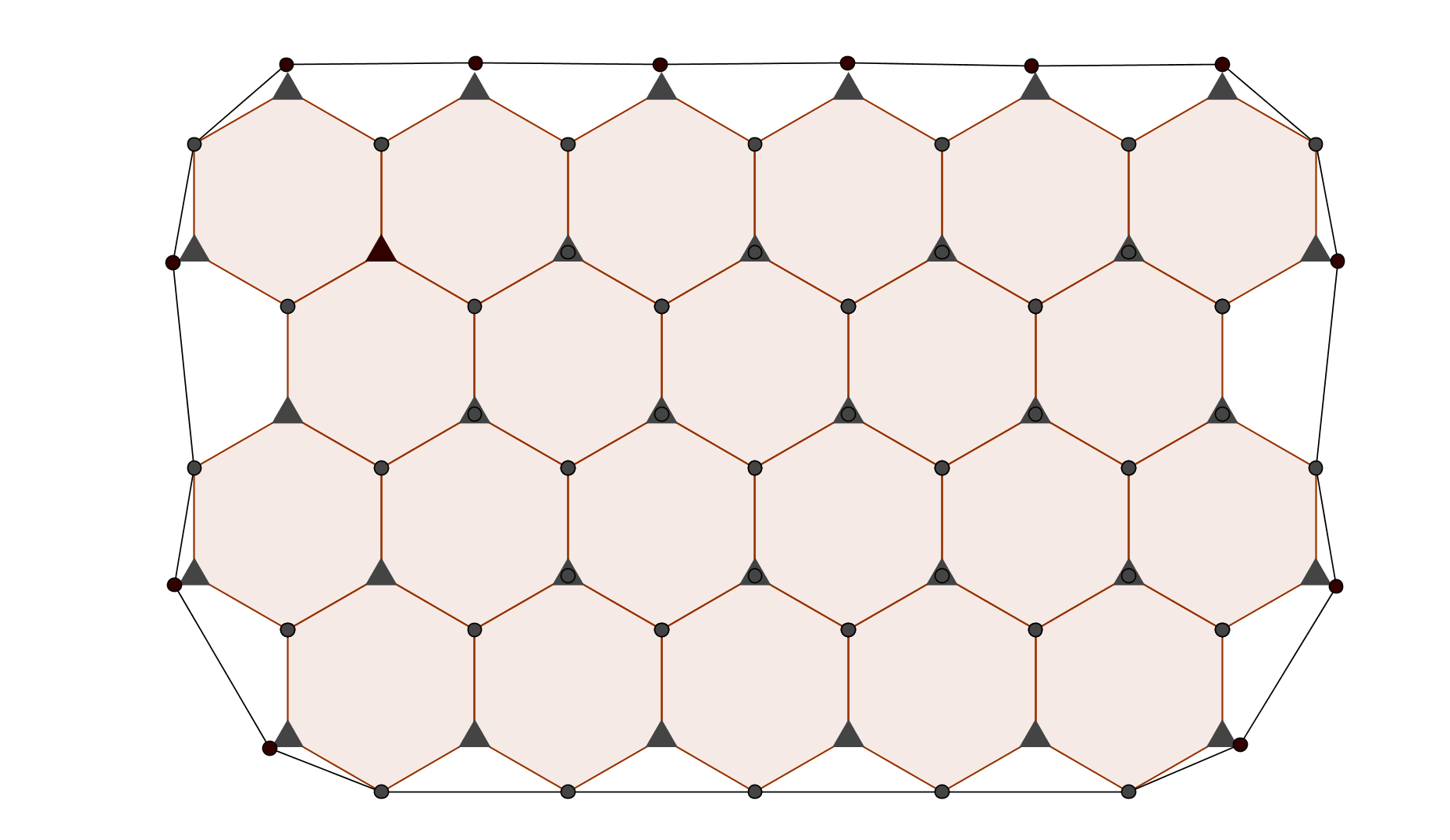


Так что оценка (4) точна при .

Следующие построения показывают, что оценка (4) точна и при



(на рисунке )



(на рисунке )

Если в полученном графе с данным значением те вершины шестиугольников, в которых образуется треугольная грань, оставить без этих треугольных граней, а в остальных, наоборот, образовать треугольные грани, то получим граф c значением .

Таким образом, с помощью конструкций при получим графы для значений , которые в предельном переходе подтверждают точность оценки (4).

А для можно за основу взять заполнение шестиугольными гранями, а затем во всех вершинах образовать треугольные грани. Так что оценка (4) точна и при