***Задача 239 (5 баллов)***

***Ответ***: а) да, б) да, в) да, г) да, д) нет.

***Решение***: а) Приведем пример многранника с вектором граней $f=(6,0,0,0,6)$. При построении за основу взят куб, затем возле шести вершин отрезаем по треугольной пирамиде.

б) в) Также приведем соответствующие графы многогранников с векторами граней $(8,0,0,0,12)$

и $(12,0,0,0,0,12)$



За основу взят правильный додекаэдр, у которого возле некоторых вершин отрезаем по треугольной пирамиде. В результате образуются новые треугольные грани, на рисунке указанные зелёным цветом.

г)



Приведем соответствующий граф многогранника с вектором граней $(16,0,0,0,0,18)$

Пусть у выпуклого многогранника вектор граней $\left(f\_{3},f\_{4},…,f\_{k}\right)$, тогда для количества рёбер $e$ имеем $2e=3f\_{3}+4f\_{4}+…+kf\_{k}$ . Из теоремы Эйлера для выпуклых многогранников следует для количества вершин $v$:

 $v=e+2-f$. (1)

В каждой вершине сходятся не меньше трёх рёбер, поэтому $2e\geq 3v$, а с учётом (1) получаем $3f\geq e+6$. И значит,

$6f=6f\_{3}+6f\_{4}+…+6f\_{k}\geq 2e+12=3f\_{3}+4f\_{4}+…+kf\_{k}+12$*,*

то есть

 $\sum\_{i=3}^{k}(6-i)f\_{i}\geq 12.$ (2)

Далее, при некотором $t\geq 7$ определим $α=\frac{f\_{t}}{f-f\_{t}}$. Тогда

$f\_{t}=α\sum\_{\begin{array}{c}3\leq i\leq k\\i\ne t\end{array}}^{}f\_{i}$,

и после подстановки в (2) получаем

$\sum\_{\begin{array}{c}3\leq i\leq k\\i\ne t\end{array}}^{}\left(6-i-α(t-6)\right)f\_{i}\geq 12.$ (3)

Левая часть неравенства положительна, тогда, как минимум, один из коэффициентов $\left(6-i-α(t-6)\right)$ в (3) также должен быть положительным. Следовательно, $3-α\left(t-6\right)>0$, и поэтому

$α<\frac{3}{t-6}.$(4)

д) При $t=9$ оценка (4) имеет вид $α<1$. Значит, в любом выпуклом многограннике количество девятиугольных граней меньше количества остальных граней, и ответ в этом пункте отрицательный.

Рассмотрим многогранник, граф которого содержит $2m$ рядов, содержащих $3mn $семиугольных граней (на рисунке обозначены фиолетовым), $mn$ треугольных граней (чёрным цветом), а также $2m+3n+3$ граней по периметру картинки (на рисунке $m=5,n=7$). Тогда $f\_{7}=3mn, f=4mn+2m+3n+3$ и

$$\frac{f\_{7}}{f-f\_{7}}=\frac{3mn}{mn+2m+3n+3}\rightarrow 3 при m,n\rightarrow +\infty $$



Так что оценка (4) точна при $t=7$.

Следующие построения показывают, что оценка (4) точна и при $t=8,9$



$f\_{8}=m\left(6n+1\right), f=m\left(10n+3\right)+6n+3+2m+1$ (на рисунке $m=3,n=3$)

$$\frac{f\_{8}}{f-f\_{8}}=\frac{m\left(6n+1\right)}{m\left(4n+2\right)+6n+3+2m+1}\rightarrow \frac{3}{2} при m,n\rightarrow +\infty $$



$f\_{9}=m\left(2n+1\right), f=4m\left(n+1\right)+3n+4m+5$ (на рисунке $m=2,n=5$)

$$\frac{f\_{9}}{f-f\_{9}}=\frac{m\left(2n+1\right)}{m\left(2n+3\right)+3n+4m+5}\rightarrow 1 при m,n\rightarrow +\infty $$

Если в полученном графе с данным значением $t$ те вершины шестиугольников, в которых образуется треугольная грань, оставить без этих треугольных граней, а в остальных, наоборот, образовать треугольные грани, то получим граф c значением $t\_{1}=18-t$ .

Таким образом, с помощью конструкций при $t=7,8$ получим графы для значений $t=10,11$, которые в предельном переходе подтверждают точность оценки (4).

А для $t=12$ можно за основу взять заполнение шестиугольными гранями, а затем во всех вершинах образовать треугольные грани. Так что оценка (4) точна и при $t=12$