***Задача 237 (5 баллов)***

***Ответ***:

***Решение***: Рассмотрим вопрос о количестве решений в уравнения

(1)

При возведении в квадрат цикл нечётной длины переходит в цикл той же длины , а цикл чётной длины распадается на два цикла в два раза меньшей длины .

Поэтому после возведения в квадрат количество циклов длины должно быть чётным. И если для перестановки это условие не выполняется, то уравнение в решений не имеет.

С учётом этого рассмотрим возможные варианты распределения длин циклов

перестановки по имеющимся длинам циклов перестановки , и посчитаем их количества и .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  | 0 | 0 |
|  |  | 1 | 1 |
|  |  | 0 | 0 |
|  |  | 0 | 0 |
|  |  | 1 | 1 |
|  |  | 0 | 0 |
|  |  | 1  3 | 4 |
|  |  | 0 | 0 |
|  |  | 0 | 0 |
|  |  | 0 | 0 |
|  |  | 0 | 0 |
|  |  | 0 | 0 |
|  |  | 5  1 | 6 |
|  |  | 0 | 0 |
|  |  | 0 | 0 |
|  |  | 1  1 | 2 |
|  |  | 2 | 2 |
|  |  | 0 | 0 |
|  |  | 1  10  15 | 26 |
|  |  | 0 | 0 |
|  |  | 4  4 | 8 |
|  |  | 0 | 0 |
|  |  | 0 | 0 |
|  |  | 0 | 0 |
|  |  | 0 | 0 |
|  |  | 0 | 0 |
|  |  | 0 | 0 |
|  |  | 0 | 0 |
|  |  | 1  9 | 10 |
|  |  | 6  2 | 8 |
|  |  | 0 | 0 |
|  |  | 1  6  3  3  18  9 | 40 |
|  |  | 0 | 0 |
|  |  | 2  6 | 8 |
|  |  | 0 | 0 |
|  |  | 1  21  105  105 | 232 |
|  |  | 0 | 0 |
|  |  | 6  12 | 18 |
|  |  | 0 | 0 |
|  |  | 2  30  90  30 | 152 |
|  |  | 0 | 0 |
|  |  | 1  45  630  3150  4725  945 | 9496 |

Видим, что ни при какой перестановке количество решений уравнения (1) не может равняться 3, а для, например, перестановки существует единственное решение уравнения (1).

Значит, утверждения Д и С ложны, а утверждение М истинно (здесь и дальше утверждения ребят обозначены первой буквой имени).

Пусть наибольшая длина цикла перестановки равна Тогда из предыдущего следует, что

Утверждение А истинно, только если длины всех циклов являются делителями 6, то есть , поэтому

Если , то утверждения А и В ложны, противоречие.

Члены последовательности Фибоначчи в пределах до 10-ти это 1,2,3,5,8. Значит, если , то верных утверждений не меньше трёх: А, В и М. Противоречие.

При возведении в степень в перестановке количество циклов не может уменьшиться, а увеличиться при возведении в 5-ую степень может, только если есть циклы длины, кратной 5-ти. Поэтому утверждение З истинно тогда и только тогда, когда длина каждого цикла не равна 5 и 10. Значит, при кроме трёх истинных утверждений А, В, М есть ещё и четвёртое - утверждение З. Противоречие.

При порядок перестановки может быть 12, если есть циклы длины 3, или 4 – в противном случае. Поэтому утверждение Т ложно. Далее, А,В – ложны, так что среди первых шести утверджений ровно одно истинно. Значит, среди последних четырёх – ровно три истинны, но это не так. Действительно, если среди утверджений З,Л,Н есть ложные, то ложно и утверждение Ф, и количество истинных среди последних четырёх менше трёх. А если все три утверджения З,Л,Н истинны, то истинно и утверждение Ф. Таким образом, этот случай не реализуется.

Если , то порядок перестановки может быть 12, если есть цикл длины 4, или рамен 6 – в противном случае. Поэтому утверждение Т ложно. Далее, В – ложно. Так что среди первых шести утверджений не больше двух истинных, Значит, все четыре последние утверджения истинны. Произведение чисел в самом длинном цикле не менше , а произведение некоторых остальных чисел (которых не больше трёх), не может быть больше . Единственно возможный вариант: , но тогда произведение чисел в цикле не кратно 7. Противоречие.

Следовательно, . Тогда ложны утверждения А, Д, С, З и тогда Ф. Значит, все остальные утверждения истинны – это В,М,Т,Л и Н.

Утверждение Т истинно, квадрат наибольшего элемента в самом длинном цикле не меньше 25. А порядок перестановки в этом случае , и в ней циклы длины 5,3,2. Значит, в самом длинном цикле - элементы 1,2,3,4,5.

Утверждение Н истинно, потому в цикле длины 3 произведение кратно 120, значит, в нём есть 10, и нет 7. Возможны варианты: (6,8,10), (8,9,10). Но во втором случае короткий цикл (6,7), а не делится на 6+7. Значит, реализуется первый случай. А с учётом истинности Л окончательно получаем .

Рассмотрим вопрос о количестве решений в уравнения

(2)

при произвольном натуральном Через обозначим количество значений в равных .

Сначала рассмотрим набор из циклов длины . При возведении в квадрат цикл чётной длины не мог сохраниться, поэтому циклы длины образуются при возведении в квадрат циклов длины .

Предположим, цикл длины при возведении в квадрат распался на два цикла . Если в цикле элемент переводится в , тогда переводится в - в и т.д. Значит, количество таких циклов определяется индексом , и всего таких циклов ровно . Остаётся учесть количество разбиений множества, состоящего из чисел на пары, равное Таким образом, всего получаем

(3)

наборов циклов длины , которые при возведении в квадрат образуют данный набор из циклов длины

Теперь рассмотрим набор из циклов длины . При возведении в квадрат цикл нечётной длины сохраняется. Но конкретный цикл мог образоваться из цикла в два раза длиннее, который при возведении в квадрат

распадается на два цикла, один из которых совпадает с исходным циклом. Пусть при некотором значении именно циклов длины образовалось после распада циклов длины . Аналогичным подсчётом получаем

(4)

- количество наборов, состоящих из циклов длины и циклов длины которые при возведении в квадрат дают исходный набор из циклов длины

В итоге получаем общее количество решений уравнения (2)