Бабочка на треугольной решётке

Докладчики: Валентина Мошкина, Елена Редченко (10 класс, 2008/2009 уч. год)

Аннотация

В работе решается задача о подсчёте количества треугольников, которые можно увидеть на треугольной решётке внутри заданной плоской фигуры.

Введение

Работа посвящена решению нескольких комбинаторных задач, объединённых общей постановкой.

Возьмём некоторую плоскую фигуру и наложим на неё *треугольную решётку*, образованную тремя семействами равноотстоящих друг от друга параллельных прямых. Внутри взятой фигуры можно увидеть много треугольников (а также параллелограммов, ромбов, шестиугольников и др.) с вершинами в узлах решётки и сторонами, идущими вдоль линий решётки. Наша основная задача состоит в подсчёте количества *треугольников*.

В §1 содержатся необходимые сведения из элементарной комбинаторики. В §2 мы приводим несколько решений задачи для случая, когда данная фигура — треугольник, а линии решётки параллельны его сторонам. Наиболее перспективный в плане обобщений способ решения мы назвали *методом бабочек*. Попутно мы решаем, также несколькими способами, родственную задачу — о числе видимых параллелограммов (см. §3). В §4 мы иллюстрируем метод бабочек ещё одним примером (фигура — ромб, а треугольная решётка предполагается с ним согласованной), а также показываем, как этот метод работает в общем случае.

§ 1. Основы элементарной комбинаторики

Комбинаторика (а точнее, *перечислительная комбинаторика*) — это раздел математики, в котором изучаются комбинации элементов некоторого, обычно конечного, множества, составленные в соответствии с теми или иными заданными правилами. Основная задача состоит в перечислении всех различных комбинаций из данного класса и, в частности, в определении их числа. Такого рода задачи принято называть *комбинаторными*.

Характерной чертой комбинаторной задачи является наличие в её условии фраз «сколькими способами», «сколько существует» и других с аналогичным смыслом. Решают комбинаторные задачи, используя специальные правила подсчёта, а также опираясь на стандартные комбинаторные конструкции. Эти правила и комбинаторные конструкции удобно излагать на абстрактном языке *теории множеств*.

I. Пусть $A_1, \ldots, A_k$ — попарно не пересекающиеся конечные множества. Тогда

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_k| = |A_1| + \ldots + |A_k|$$

(здесь и далее $|A|$ обозначает число элементов в множестве A). Это утверждение называют *правилом суммы* и часто формулируют следующим образом (для случая $k = 2$):

Если α можно выбрать m способами, а β — n способами, причём любой способ выбора α отличается от любого способа выбора β, то выбрать α или β можно $m + n$ способами.

II. Пусть $A_1, \ldots, A_k$ — произвольные множества. *Декартовым произведением* множеств $A_1, \ldots, A_k$ называется множество

$$A_1 \times \ldots \times A_k = \{(x_1, \ldots, x_k) : x_1 \in A_1, \ldots, x_k \in A_k\}.$$

Здесь $(x_1, \ldots, x_k)$ — упорядоченный набор элементов $x_1, \ldots, x_k$. Если множества $A_1, \ldots, A_k$ конечны, то

$$|A_1 \times \ldots \times A_k| = |A_1| \cdot \ldots \cdot |A_k|.$$

Это утверждение называют *правилом произведения*. При $k = 2$ оно может быть сформулировано следующим образом:

Если α можно выбрать m способами, а β — n способами, то упорядоченную пару (α, β) можно выбрать mn способами.

III. Перейдём к описанию основных комбинаторных конструкций.

1. Размещения и перестановки.

Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — произвольное n-элементное множество. *Размещением* элементов из множества A по k (коротко: размещением из n по k) называется любой упорядоченный набор из k различных элементов, принадлежащих A. Число всех размещений из n по k обозначается через A_n^k (от французского *arrangement* — размещение). Для числа размещений справедлива формула

$$A_n^k = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).$$

Перестановкой элементов множества A называется их запись в некотором определённом порядке. Иными словами, перестановка элементов множества A — это размещение его элементов при $k = n$. Число всех перестановок n-элементного множества обозначается через P_n (от французского *permutation* — перестановка). Имеем

$$P_n = A_n^n = n!.$$

2. Размещения и перестановки с повторениями.

Допустим, что каждый элемент n-элементного множества $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ можно использовать любое число раз (или каждый элемент может быть представлен в любом количестве экземпляров). *Размещением с повторениями* элементов из множества A по k (коротко: размещением с повторениями из n по k) называется любой упорядоченный набор из k элементов, принадлежащих A (при этом в наборе допускается наличие одинаковых элементов). По другому говоря, размещение с повторениями из n по k есть элемент k-й декартовой степени n-элементного множества. Число всевозможных размещений с повторениями из n по k обозначается через $\overline{A}_n^k$. Имеет место формула

$$\overline{A}_n^k = n^k.$$

Пусть теперь число экземпляров каждого элемента a_i множества A ограничено и равно k_i. *Перестановкой с повторениями* элементов множества A, имеющей состав $(k_1, \ldots, k_n)$, называется любой упорядоченный набор из $k = k_1 + \ldots + k_n$ элементов, принадлежащих A, при этом элемент a_i присутствует в наборе k_i раз, $i = 1, 2, \ldots, n$. Таким образом, перестановки с повторениями — это размещения с повторениями, обладающие заданным составом повторяющихся элементов. Число всевозможных перестановок с повторениями, имеющих состав $(k_1, \ldots, k_n)$, обозначается через $P(k_1, \ldots, k_n)$. Справедлива формула

$$P(k_1, \ldots, k_n) = \frac{(k_1 + \ldots + k_n)!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_n!}.$$

3. Сочетания без повторений и с повторениями.

Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — n-элементное множество. *Сочетанием* элементов из множества A по k (коротко: сочетанием из n по k) называется любой неупорядоченный набор из

k различных элементов, принадлежащих A. Можно сказать также, что сочетание из n по k — это некоторое k-элементное подмножество n-элементного множества. Число всевозможных сочетаний из n по k обозначается через C_n^k (от французского *combinaison* — сочетание). Имеем

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Снова будем считать, что каждый элемент множества A может быть представлен в любом количестве экземпляров. *Сочетанием с повторениями* элементов из множества A по k (коротко: сочетанием с повторениями из n по k) называется любой неупорядоченный набор из k элементов, принадлежащих A (при этом в наборе уже допускается наличие одинаковых элементов). Число всевозможных сочетаний с повторениями из n по k обозначается через $\overline{C}_n^k$. Можно показать, что

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k.$$

В дальнейшем конструкция сочетаний с повторениями будет для нас особенно важна, поэтому мы приведём одно из возможных доказательств этой формулы.

Число сочетаний с повторениями из n по k равно числу N_1 упорядоченных наборов $(k_1, \ldots, k_n)$ неотрицательных целых чисел, удовлетворяющих уравнению

$$k_1 + \ldots + k_n = k.$$

Число N_1 в свою очередь равно числу N_2 упорядоченных наборов $(l_1, \ldots, l_n)$ положительных целых чисел, удовлетворяющих уравнению

$$l_1 + \ldots + l_n = m,$$

где $m := k + n$, $l_i := k_i + 1$ $(i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n)$. Чтобы найти N_2, представим m в виде диаграммы из m точек, расположенных на одной прямой.

$$m = 8 \qquad \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$$

Задача, таким образом, сводится к следующему вопросу: сколькими способами можно разбить m точек диаграммы на n групп, ставя между точками $n-1$ разделитель.

$$m = 8, \quad n = 4 \qquad \bullet * \bullet\bullet\bullet * \bullet\bullet * \bullet\bullet \qquad 1+3+2+2=8$$

Ясно, что это число способов равно C_{m-1}^{n-1}, так как между m точками имеется $m-1$ промежутков, а из них следует выбрать $n-1$ промежутков, в которые затем и поставить разделители. Следовательно,

$$N_2 = C_{m-1}^{n-1} = C_{k+n-1}^{n-1} = C_{n+k-1}^k,$$

и формула доказана.

Более подробно с основами элементарной комбинаторики можно познакомиться, например, по книгам Н. Я. Виленкина (см. список литературы).

§2. Сколько видно треугольников?

Одной из самых популярных комбинаторных задач, несомненно, является задача о числе *счастливых билетов* (наиболее полное изложение см. в статье [4]). Эта задача интересна ещё и тем, что, решая её, можно многому научиться. Но таких красивых и поучительных комбинаторных задач много, и вот одна из них.

Задача 1. *Линиями, параллельными сторонам, треугольник разбит на n^2 маленьких треугольников («треугольная решётка»). А сколько всего треугольников можно увидеть на этом рисунке? И каких больше — одинаково ориентированных с исходным или имеющих противоположную ориентацию?*

Обозначим число треугольников, которые можно усмотреть на таком рисунке, через $\mathbf{T}_n$; пусть также $\mathbf{T}_n^{\triangle}$ ($\mathbf{T}_n^{\triangledown}$) — число одинаково (противоположно) ориентированных среди них по отношению к исходному треугольнику.

Решение. Введём косоугольную систему координат, связанную с данным треугольником: начало координат поместим в одну из вершин, а оси координат направим вдоль сторон, выходящих из этой вершины.

Расположим в треугольнике *наибольшую* по размерам «бабочку» так, чтобы её «голова» находилась в точке с координатами (x, y). В треугольных крыльях такой бабочки можно насчитать ровно

$$b(x, y) = n - \max\{x, y\}$$

треугольников, одна из вершин которых совпадает с головой бабочки. Суммируя по всем бабочкам, найдем общее количество видимых треугольников:

$$\begin{gathered}
\mathbf{T}_n = \sum_{0\leqslant x+y\leqslant n} b(x,y) = \\
= \sum_{0\leqslant x+y\leqslant n} (n - \max\{x,y\}) = \sum_{0\leqslant 2x\leqslant n} (n-x) + 2\sum_{\substack{0\leqslant x+y\leqslant n,\\ 0\leqslant x<y\leqslant n}} (n-y) = \\
= \sum_{x=0}^{n_1}(n-x) + 2\sum_{x=0}^{n-1}\sum_{y=x+1}^{n-x}(n-y) = \sum_{x=0}^{n_1}(n-x) + 2\sum_{x=0}^{n_2}\sum_{y=x+1}^{n-x}(n-y) = \\
= \frac{(2n-n_1)(n_1+1)}{2} + (n-n_2)(n-1)(n_2+1) \sim \frac{n^3}{4},
\end{gathered}$$

где $n_1 = [n/2]$ и $n_2 = [(n-1)/2]$.

Ответ на второй вопрос задачи интуитивно ясен — треугольников, одинаково ориентированных с исходным, должно быть больше. Но во сколько раз?

Рассуждая как выше, найдем число видимых противоположно ориентированных треугольников:

$$\begin{gathered}
\mathbf{T}_n^{\triangledown} = \sum_{0\leqslant x+y\leqslant n} \min\{x,y\} = \sum_{0\leqslant 2x\leqslant n} x + 2\sum_{\substack{0\leqslant x+y\leqslant n,\\ 0\leqslant x<y\leqslant n}} x = \\
= \sum_{x=0}^{n_1} x + 2\sum_{x=0}^{n_2}\sum_{y=x+1}^{n-x} x = \frac{n_1(n_1+1)}{2} + \frac{n_2(n_2+1)(3n-4n_2-2)}{3} \sim \frac{n^3}{12}.
\end{gathered}$$

Значит, количество одинаково ориентированных треугольников есть

$$\mathbf{T}_n^{\triangle} = \mathbf{T}_n - \mathbf{T}_n^{\triangledown} \sim \frac{n^3}{4} - \frac{n^3}{12} = \frac{n^3}{6},$$

т. е. примерно в два раза больше.

Впрочем, $\mathbf{T}_n^{\triangle}$ можно было бы найти и непосредственно:

$$\mathbf{T}_n^{\triangle} = \sum_{0\leqslant x+y\leqslant n}(n-x-y) = \sum_{s=0}^{n}(s+1)(n-s) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Забавное совпадение: $\mathbf{T}_n^{\triangle}$ оказалось равным числу сочетаний C_{n+2}^3! Скорее всего, это намёк на ещё одно, комбинаторное решение. И действительно,

$$\mathbf{T}_n^{\triangle} = A_n = \sum_{k=2}^{n+1} C_k^2 = C_{n+2}^3,$$

где A_n — число способов выбрать два узла решетки «параллельно» какой-нибудь фиксированной стороне исходного треугольника.

А есть ли *чисто комбинаторное* решение (без использования тождеств с числами сочетаний)? Есть! Всякий треугольник $\triangle$, одинаково ориентированный с исходным, однозначно определяется упорядоченной четвёркой (x, y, z, a), где x, y, z — расстояния от сторон $\triangle$ до сторон исходного треугольника, a — размер $\triangle$, при этом $a > 0$ и имеет место равенство

$$x + y + z + a = n.$$

Но таких четвёрок в точности C_{n+2}^3 (см. доказательство формулы для числа сочетаний с повторениями). $\square$

Отметим одно обстоятельство, характерное для всего класса комбинаторных задач: то, что нам удалось найти несколько решений комбинаторной задачи, является скорее правилом, чем исключением.

Вот, например, ещё один способ подсчитать $\mathbf{T}_n^{\triangledown}$. Нетрудно убедиться в справедливости следующего рекуррентного соотношения:

$$\mathbf{T}_{k+1}^{\triangledown} = \mathbf{T}_k^{\triangledown} + \Delta_k, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где Δ_k вычисляется по формуле

$$\Delta_k = \begin{cases} l^2, & \text{если } k = 2l-1, \\ l(l+1), & \text{если } k = 2l. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\mathbf{T}_n^{\triangledown} = \sum_{k=1}^{n-1} \Delta_k.$$

Далее следует отдельно рассмотреть случаи нечётного и чётного n. Имеем

$$\mathbf{T}_{2m+1}^{\triangledown} = \sum_{k=1}^{2m} \Delta_k = \sum_{l=1}^{m} \Delta_{2l} + \sum_{l=1}^{m} \Delta_{2l-1} = \sum_{l=1}^{m}(2l^2+l) = \frac{m(m+1)(4m+5)}{6},$$

$$\mathbf{T}_{2m}^{\triangledown} = \sum_{k=1}^{2m-1} \Delta_k = \sum_{l=1}^{m-1} \Delta_{2l} + \sum_{l=1}^{m} \Delta_{2l-1} = \sum_{l=1}^{m-1}(2l^2+l) + m^2 = \frac{m(m+1)(4m-1)}{6}.$$

Получилось, конечно, то же, что и выше, но запись ответа иная.

§3. А сколько видно параллелограммов?

На нашем рисунке с треугольной решёткой можно увидеть не только треугольники, но также и параллелограммы. Сама собой напрашивается

Задача 2. *А сколько видно параллелограммов?*

Обозначим число видимых параллелограммов через $\mathbf{\Pi}_n$. Мы предложим несколько решений этой задачи.

1-е решение. Идея этого решения — рекуррентное соотношение или прямой подсчёт. Имеем $\mathbf{\Pi}_n = 3\mathbf{\Pi}_n^{\Diamond}$, где $\mathbf{\Pi}_n^{\Diamond}$ (понятно, что это) удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\mathbf{\Pi}_n^{\Diamond} = \mathbf{\Pi}_{n-1}^{\Diamond} + \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k),$$

откуда находим явное выражение:

$$\mathbf{\Pi}_n^{\Diamond} = \mathbf{\Pi}_1^{\Diamond} + \sum_{l=2}^{n} \sum_{k=1}^{l-1} k(l-k) = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{24}.$$

Разумеется, то же самое можно получить и прямым подсчётом:

$$\mathbf{\Pi}_n^{\Diamond} = \sum_{1 \leqslant x+y \leqslant n} xy = \sum_{s=1}^{n} \sum_{x=1}^{s-1} x(s-x) = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{24}.$$

По сути этот второй способ совпадает с первым. □

2-е решение. Невозможно не заметить совпадения $\mathbf{\Pi}_n^{\Diamond} = C_{n+2}^4$, и вряд ли оно случайно. В самом деле,

$$\mathbf{\Pi}_n^{\Diamond} = B_n = \sum_{k=2}^{n+1} C_k^3 = C_{n+2}^4,$$

где B_n — число способов выбрать три узла решетки «параллельно» какой-нибудь фиксированной стороне исходного треугольника. □

3-е решение. Как и выше, можно обойтись без тождеств с биномиальными коэффициентами. Поместим параллелограмм «в угол» наименьшего треугольника $\triangle$, одинаково ориентированного с исходным треугольником. Тогда параллелограмм можно однозначно задать упорядоченной пятёркой (x, y, z, a_1, a_2), где x, y, z — расстояния от сторон $\triangle$ до сторон исходного треугольника, a_1 и a_2 определяют форму параллелограмма (в частности, $a_1 + a_2 = a$ — размер треугольника $\triangle$), при этом $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ и выполнено равенство

$$x + y + z + a_1 + a_2 = n.$$

Таких пятёрок ровно C_{n+2}^4 (опять сочетания с повторениями). □

4-Е РЕШЕНИЕ. Число всех узлов треугольной решетки равно

$$N_n = 1 + 2 + \ldots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Нетрудно видеть, что $\mathbf{\Pi}_n$ равно числу способов выбрать два узла решетки «непараллельно» никакой стороне исходного треугольника, т. е.

$$\mathbf{\Pi}_n = C_{N_n}^2 - 3A_n = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{8}.$$

Здесь мы подсчитали сразу искомое $\mathbf{\Pi}_n$, а не промежуточное $\mathbf{\Pi}_n^{\lozenge}$. □

При взгляде на треугольную решётку на вопрос «Чего больше видно: треугольников или параллелограммов?» обычно отвечают, что треугольников больше (чисто психологически такой ответ кажется более правильным). Однако в действительности параллелограммов *гораздо* больше, чем треугольников: как показывают наши вычисления, $\mathbf{\Pi}_n \sim n^4/8$, в то время как $\mathbf{T}_n \sim n^3/4$, так что $\mathbf{\Pi}_n$ больше $\mathbf{T}_n$ примерно в $n/2$ раз.

Впрочем, это можно понять и без всяких вычислений: параллелограммов больше, потому что они могут быть *разной* формы, а все треугольники между собой подобны. Это рассуждение нетрудно количественно уточнить: выбор треугольника означает выбор *трёх* прямых, каждую из которых можно выбрать n способами; параллелограмм же определяется *четырьмя* такими прямыми. Отсюда $\mathbf{T}_n \asymp n^3$, а $\mathbf{\Pi}_n \asymp n^4$.

§4. Метод бабочек в других задачах

Метод бабочек можно с успехом применять и для решения других подобных задач. Вот ещё один пример.

Задача 3. *Дан ромб, разбитый на $2n^2$ треугольников линиями, параллельными сторонам и одной из двух диагоналей. Сколько на этом рисунке можно обнаружить треугольников и сколько параллелограммов?*

Для числа параллелограммов приведём лишь ответ:

$$\mathbf{\Pi}_n = \frac{n(n+1)(3n^2+n-1)}{6}$$

(мы его получили, используя идею 4-го решения предыдущей задачи). Что касается подсчёта количества $\mathbf{T}_n$ треугольников, то это опять можно сделать несколькими способами.

1-Е РЕШЕНИЕ. Суммируем по бабочкам:

$$\mathbf{T}_n = \sum_{0 \leqslant x,y \leqslant n} (n - |x-y|) = \sum_{0 \leqslant x \leqslant n} n + 2 \sum_{0 \leqslant x < y \leqslant n} (n + x - y) =$$
$$= n(n+1) + 2\sum_{x=0}^{n-1} \sum_{y=x+1}^{n} (n+x-y) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}.$$

Здесь и вычисления, и сам ответ оказались даже проще, чем в задаче 1. □

2-Е РЕШЕНИЕ. Можно, конечно, и ещё проще:

$$\mathbf{T}_n = 2(2\sum_{k=2}^{n+1} C_k^2 - C_{n+1}^2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$$

(здесь мы воспользовались тем, что $\mathbf{T}_n^{\triangledown} = \mathbf{T}_n^{\vartriangle}$). $\square$

3-Е РЕШЕНИЕ. Или совсем банально, заметив, что речь идет об удвоенном числе квадратов, которые можно увидеть на квадратном листе клетчатой бумаги:

$$\mathbf{T}_n = 2\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}.$$

Задача неожиданно оказалась очень простой! $\square$

Примеров такого типа мы могли бы привести много, однако гораздо интереснее поставить и решить *общую задачу*. Вот её формулировка.

Общая задача. *Пусть на плоскости дана какая-нибудь фигура* Φ. *Наложим на неё треугольную решётку с достаточно малой ячейкой. Сколько треугольников можно увидеть внутри фигуры* Φ*?*

Удобно предварительно задать на плоскости декартову (прямоугольную) систему координат и считать, что решётка порождается векторами

$$\boldsymbol{e}_1(h) = (h\cos 60^\circ, h\sin 60^\circ), \quad \boldsymbol{e}_2(h) = (h\cos 120^\circ, h\sin 120^\circ),$$

где h — малый положительный параметр. В частности, элементарная ячейка решётки представляет собой правильный треугольник со стороной h. Будем считать также, что начало координат $(0,0)$ принадлежит фигуре Φ.

Обозначим количество треугольников, которые можно увидеть внутри фигуры Φ, через $\mathbf{T}_h(\Phi)$. Дать точную формулу для $\mathbf{T}_h(\Phi)$ в общем случае затруднительно, да это и не требуется. С практической точки зрения достаточно иметь хорошую *приближённую* формулу. Такая формула есть.

Теорема. *При* $h \to 0$ *справедлива оценка*

$$\mathbf{T}_h(\Phi) \sim \frac{\tau}{h^3}, \tag{1}$$

где $\tau > 0$ *— константа, не зависящая от* h.

Константу

$$\tau = \tau(\Phi)$$

естественно назвать *треугольной ёмкостью* фигуры Φ (при фиксированном расположении фигуры Φ по отношению к треугольной решётке). Например, если Φ — правильный треугольник со сторонами, лежащими на линиях решётки, то, как вытекает из решения задачи 1,

$$\tau(\Phi) = \frac{a^3}{4},$$

где a — длина стороны треугольника.

Доказательство. Введём в рассмотрение функцию $b_\Phi(x,y)$ — так называемую функцию «размаха» крыльев бабочки, голова которой находится в точке $(x,y) \in \Phi$, а крылья упираются в границу фигуры Φ. Если $\Lambda_h(\Phi)$ — множество узлов решётки, расположенных внутри фигуры Φ, то, как следует из определения интеграла,

$$\iint\limits_{\Phi} b_\Phi(x,y)\,dxdy = \lim_{h\to 0} \sum_{(x,y)\in\Lambda_h(\Phi)} b_\Phi(x,y)\Delta_h, \tag{2}$$

где $\Delta_h = h^2\sqrt{3}/2$ есть площадь элементарного параллелограмма решётки. С другой стороны, при $h \to 0$ имеем

$$\mathbf{T}_h(\Phi) \sim \sum_{(x,y)\in\Lambda_h(\Phi)} \frac{b_\Phi(x,y)}{l_h}, \tag{3}$$

где $l_h = h\sqrt{3}/2$ есть высота элементарного треугольника решётки. Сопоставляя (2) и (3), мы приходим к выводу о справедливости оценки (1) с константой

$$\tau = \tau(\Phi) = \frac{4}{3}\iint\limits_{\Phi} b_\Phi(x,y)\,dxdy. \tag{4}$$

Этим теорема доказана. $\square$

Пример 1. Пусть Φ — ромб с вершинами в точках $(\pm\cos 60^\circ, 0)$, $(0, \pm\sin 60^\circ)$. Тогда

$$b_\Phi(x,y) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,(1 - 2|x|).$$

Вычисляя по формуле (4), находим

$$\tau(\textit{ромб}) = \frac{2}{3},$$

что вполне согласуется с ответом, полученным при решении задачи 3.

Пример 2. Пусть Φ — круг единичного радиуса с центром в начале координат. Для определения функции размаха крыльев бабочки здесь удобнее использовать полярные координаты (r,ϕ), связанные с декартовыми координатами (x,y) равенствами

$$x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi.$$

При $0 \leqslant \phi \leqslant 90^\circ$ имеем

$$b_\Phi(x,y) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-r\cos\phi + \sqrt{1 - r^2\sin^2(\phi - 60^\circ)} + \sqrt{1 - r^2\sin^2(\phi + 60^\circ)}\right);$$

при остальных ϕ можно воспользоваться симметрией. Вычисляя интеграл, находим треугольную ёмкость круга:

$$\tau(\textit{круг}) = \frac{8}{\sqrt{3}}.$$

Для сравнения треугольных ёмкостей различных по форме фигур можно ввести *удельный коэффициент треугольной ёмкости* по формуле

$$\tau_0(\Phi) = \frac{\tau(\Phi)^{2/3}}{S(\Phi)},$$

где $S(\Phi)$ — площадь фигуры Φ. Очевидно, что $\tau_0(\Phi)$ не изменится, если фигуру Φ подвергнуть гомотетии. Отметим один удивительный факт:

$$\tau_0(\textit{круг}) = \frac{4}{\pi\sqrt[3]{3}} = 0.88\ldots < 0.91\ldots = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}} = \tau_0(\textit{треугольник}).$$

Это неравенство можно истолковать следующим образом: если взять круг и равновеликий ему правильный треугольник, а затем наложить на каждую из этих фигур одинаковую треугольную решётку с достаточно малой ячейкой, то внутри круга мы увидим *меньше* (примерно на 5%) треугольников, чем внутри треугольника.

Заключение

Метод бабочек не только позволил нам дать приемлемое решение общей задачи, но и оказался эффективным в тех её частных случаях, где требовалось определить точное количество видимых на рисунке треугольников. Таким образом, цель работы достигнута.

Располагая формулой (4) для треугольной ёмкости, мы теперь можем решать различные *экстремальные* задачи (например, такую: *отыскать прямоугольник с вершинами в точках* $(\pm a, \pm b)$*, обладающий максимальным удельным коэффициентом треугольной ёмкости*). Можно также выяснить, как меняется треугольная ёмкость $\tau(\Phi)$ при *поворотах* фигуры Φ вокруг начала координат.

С другой стороны, было бы интересно перенести метод бабочек в пространство. Поводом к этому мог бы стать следующий вопрос. Представим себе, что плоскостями, параллельными граням, некоторый тетраэдр разбит на n^3 маленьких тетраэдров. *Сколько тетраэдров можно насчитать, глядя на такую «тетраэдральную решётку»?*

Решение этих и других подобных вопросов мы надеемся дать позднее.

Список литературы

[1] *Виленкин Н.Я.* Популярная комбинаторика. М.: Наука, 1975.

[2] *Виленкин Н.Я.* Индукция. Комбинаторика. М.: Просвещение, 1976.

[3] *Виленкин Н.Я., Виленкин А.Н., Виленкин П.А.* Комбинаторика. М.: ФИМА, МЦНМО, 2006.

[4] *Ландо С.К.* Счастливые билеты // Математическое просвещение. 1998. Сер. 3. Вып. 2. С. 127 — 132.