

# Ещё раз о механическом доказательстве геометрических теорем

Докладчик: Ольга Мамаева (11 класс, 2005/2006 уч. год)

## Аннотация

Старая идея Декарта доказывать геометрические утверждения средствами алгебры в настоящее время, когда появились и мощная вычислительная техника, и системы компьютерной алгебры, может быть эффективно реализована. В работе предлагается для реализации этой идеи систематически применять аппарат комплексных чисел. Приводятся многочисленные примеры решения геометрических задач и проверки гипотез при помощи комплексных чисел. Все вычисления проводятся при помощи специализированного модуля `geom`, созданного на базе системы компьютерной алгебры MAPLE.

Введение .....	135
§1. То, что необходимо знать о комплексных числах .....	136
§2. Некоторые геометрические утверждения на языке комплексных чисел .....	136
§3. Примеры решения задач .....	138
§4. Модуль <code>geom</code> .....	145
Заключение .....	146
Список литературы .....	146
Приложение .....	147

## Введение

Идея *механического доказательства* геометрических теорем восходит к французскому философу, математику и физику Рене Декарту (1596 — 1650). Если говорить коротко, то доказательство теоремы сводится к некоторой последовательности вычислений, однозначно определяемой исходными данными — условиями теоремы. Средства современной компьютерной алгебры позволяют во многих случаях эффективно осуществлять эту последовательность вычислений, при этом составление самой последовательности вычислений (программы), как правило, не представляет особого труда.

Механический способ доказательства теорем планиметрии, сводящийся к некоторой вычислительной процедуре, хорошо известен (см., например, книгу [1, гл. III]) и в ряде случаев оказывается весьма эффективным. Главное преимущество такого способа перед традиционным *синтетическим методом* — это возможность доказать требуемый факт легко, по существу не думая, а лишь используя в нужной последовательности стандартные вычислительные операции, имеющиеся (или просто реализуемые) в любой системе компьютерной алгебры. Отметим типичный и очень важный пример такой операции — вычисление точки пересечения двух прямых.

Целью работы является демонстрация возможностей механического метода на примере планиметрических задач и теорем так называемого *рационального типа* (см. §3). Задачи и теоремы этого класса в изрядном количестве представлены во многих сборниках геометрических задач (укажем лишь на классические задачки Шарыгина [2], [3] и Прасолова [4]) и часто встречаются на математических олимпиадах разного уровня.

Для практической реализации механического метода мы привлекаем *комплексные числа*, имея в виду прежде всего очевидный геометрический смысл алгебраических операций над ними. В последнее время эта идея снова становится популярной (см. недавно вышедшую книгу [5]).

К сожалению, громоздкие алгебраические преобразования — неотъемлемая часть механического метода. Для достижения наибольшего комфорта при решении задач механическим методом мы рекомендуем использовать какую-нибудь систему компьютерной алгебры, например MAPLE [6].<sup>1)</sup>

Одним из результатов работы является созданный нами модуль *geom*, написанный на языке MAPLE и предназначенный для систематического применения механического метода в планиметрии. Основное отличие модуля *geom* от ему подобных (например, от встроенного в MAPLE модуля *geometry*) состоит в том, что вместо привычных декартовых координат  $x$  и  $y$  используется одна комплексная координата

$$z = x + iy.$$

Это позволяет не только экономить на переменных (грубо говоря, их оказывается в два раза меньше), но и делает механический метод более удобным для применения в тех случаях, когда в формулировке задачи идёт речь об окружностях (уравнение окружности в декартовых координатах имеет более сложный вид, чем в комплексных).

Краткому описанию модуля *geom* посвящён §4 (см. также Приложение, п. А). Модуль *geom* могут использовать как школьники, желающие хоть как-нибудь решить неподдающуюся геометрическую задачу, так и специалисты в области элементарной геометрии (например, для проверки гипотез, возникающих при конструировании новых олимпиадных геометрических задач).

---

<sup>1)</sup>Желающие могут проводить все вычисления вручную — это хорошее упражнение на выносливость.

## §1. То, что необходимо знать о комплексных числах

Конечно же, нужно знать, как выполняются действия над комплексными числами, заданными как в алгебраической, так и в тригонометрической формах. Необходимо знать свойства сопряжённых комплексных чисел, тождество

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z}.$$

Помнить, что при выбранной прямоугольной системе координат на плоскости всякое комплексное число изображается точкой, а также вектором с началом в начале координат и концом в этой точке.<sup>2)</sup> Комплексные числа геометрически складываются по правилу параллелограмма. Чтобы геометрически умножить комплексное число  $z$  на комплексное число  $w$ , нужно вектор  $z$  «растянуть» в  $|w|$  раз, а затем полученный вектор повернуть на угол, равный  $\arg w$ , в положительном направлении (за таковое обычно принимают направление против движения часовой стрелки). Не надо забывать, что корни  $n$ -й степени из данного комплексного числа  $z$  располагаются на окружности с центром в начале координат и радиусом, равным  $\sqrt[n]{|z|}$ , и делят эту окружность на  $n$  равных частей. В частности, корни  $n$ -й степени из единицы располагаются на *единичной окружности* (окружности с центром в начале координат и радиусом 1) и делят её на  $n$  равных частей, начиная от точки 1.

Более подробно с алгеброй комплексных чисел и её связью с геометрией можно познакомиться по книге [5].

## §2. Некоторые геометрические утверждения на языке комплексных чисел

При решении задач необходимо также знать «правила перевода» различных геометрических условий на язык комплексных чисел. Укажем некоторые из них.

Для удобства формулировок здесь и далее будут использоваться следующие обозначения:

$l(P, v)$  — прямая, проходящая через точку  $P$  в направлении вектора  $v$ ;

$c(O, P)$  — окружность с центром в точке  $O$ , проходящая через точку  $P$ .

Кроме того, мы обозначаем комплексные числа, ассоциированные с точками  $A, B, C, \dots, Z$ , соответствующими маленькими буквами  $a, b, c, \dots, z$ .

1. Вектор  $\overrightarrow{PQ}$  равен вектору  $v$  тогда и только тогда, когда

$$v = q - p.$$

2. Расстояние между точками  $P$  и  $Q$  равно  $\rho$  тогда и только тогда, когда

$$|p - q|^2 = \rho^2.$$

---

<sup>2)</sup>Очевидно, при выбранной ориентации плоскости прямоугольную систему координат на ней можно считать заданной, если указаны две различные точки  $A$  и  $B$ , которые будут считаться (комплексным) нулем и (комплексной же) единицей:  $A = 0$  и  $B = 1$ .

3. Точка  $Z$  делит отрезок  $PQ$  в отношении  $\lambda \neq -1$  ( $\overrightarrow{PZ} = \lambda \overrightarrow{ZQ}$ ) тогда и только тогда, когда

$$z = \frac{p + \lambda q}{1 + \lambda}.$$

4. Точка  $Z$  лежит на окружности  $c(O, P)$  тогда и только тогда, когда

$$|z - o|^2 = |p - o|^2.$$

5. Точка  $Z$  лежит на единичной окружности тогда и только тогда, когда

$$\bar{z} = z^{-1}.$$

6. Векторы  $v$  и  $w$  коллинеарны тогда и только тогда, когда

$$v\bar{w} - \bar{v}w = 0.$$

7. Векторы  $v$  и  $w$  перпендикулярны тогда и только тогда, когда

$$v\bar{w} + \bar{v}w = 0.$$

8. Точки  $P, Q, R$  лежат на одной прямой (коллинеарные точки) тогда и только тогда, когда векторы  $v = \overrightarrow{PQ}$  и  $w = \overrightarrow{PR}$  коллинеарны.

9. Неколлинеарные точки  $P, Q, R, S$  лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда

$$\frac{p - r}{q - r} : \frac{p - s}{q - s} = \frac{\bar{p} - \bar{r}}{\bar{q} - \bar{r}} : \frac{\bar{p} - \bar{s}}{\bar{q} - \bar{s}}.$$

10. Точка  $Z$  является точкой пересечения непараллельных прямых  $l(P, v)$  и  $l(Q, w)$  тогда и только тогда, когда

$$z = \frac{v(q\bar{w} - \bar{q}w) - w(p\bar{v} - \bar{p}v)}{v\bar{w} - \bar{v}w}.$$

11. Точка  $O$  является центром окружности, проходящей через неколлинеарные точки  $P, Q, R$  тогда и только тогда, когда

$$o = \frac{(q\bar{q} - p\bar{p})(p - r) - (r\bar{r} - p\bar{p})(p - q)}{(p - q)(\bar{p} - \bar{r}) - (\bar{p} - \bar{q})(p - r)}.$$

12. Точка  $H$  является основанием перпендикуляра, проведённого из точки  $Z$  к прямой  $l(P, v)$ , тогда и только тогда, когда

$$h = \frac{z\bar{v} + \bar{z}v + p\bar{v} - \bar{p}v}{2\bar{v}}.$$

13. Точка  $W$  симметрична точке  $Z$  относительно прямой  $l(P, v)$  тогда и только тогда, когда

$$w = \frac{\bar{z}v + p\bar{v} - \bar{p}v}{\bar{v}}.$$

14. Точка  $W$  симметрична точке  $Z$  относительно точки  $P$  тогда и только тогда, когда

$$w = 2p - z.$$

15. Треугольники  $ABC$  и  $PQR$  подобны и одинаково ориентированы (подобие 1-го рода, или гомотетичность) тогда и только тогда, когда

$$aq + br + cp = bp + cq + ar.$$

16. Треугольники  $ABC$  и  $PQR$  подобны и противоположно ориентированы (подобие 2-го рода) тогда и только тогда, когда

$$a\bar{q} + b\bar{r} + c\bar{p} = b\bar{p} + c\bar{q} + a\bar{r}.$$

17. Прямая  $l(P, v)$  и окружность  $c(O, Q)$  касаются в точке  $T$  тогда и только тогда, когда

$$|t - o|^2 = |q - o|^2, \quad t = \frac{o\bar{v} + \bar{o}v + p\bar{v} - \bar{p}v}{2\bar{v}}.$$

18. Окружности  $c(O, P)$  и  $c(C, Q)$  с разными центрами касаются в точке  $T$  тогда и только тогда, когда

$$|t - o|^2 = |p - o|^2, \quad t = \frac{p\bar{p} - q\bar{q} - p\bar{o} - \bar{p}o + q\bar{c} + \bar{q}c - \bar{o}c + o\bar{c}}{2(\bar{c} - \bar{o})}.$$

19. Ориентированная площадь треугольника  $ABC$  равна

$$\frac{v\bar{w} - \bar{v}w}{-4i},$$

где  $v = \overrightarrow{AB}$ ,  $w = \overrightarrow{AC}$ .

### §3. Примеры решения задач

Приведём механические решения некоторых геометрических задач рационального типа, взятых из различных математических олимпиад школьников. Далее IMO — Международная математическая олимпиада, ММО — Московская математическая олимпиада, СПбМО — Санкт-Петербургская математическая олимпиада. Равенство типа

$$P = f(a, b, c, \dots, z),$$

где  $P$  — точка, а  $f$  — некоторое рациональное выражение от комплексных чисел  $a, b, c, \dots, z$ , означает, что точка  $P$  определяется комплексным числом  $f(a, b, c, \dots, z)$ .

Не давая строгих определений, отметим, что рациональный тип характерен для довольно широкого класса задач, многие из которых в какой-то степени связаны с окружностью. Обычно из условия задачи более или менее ясно, относится ли она к рациональному типу или нет. Вот типичный пример.

**Задача 1** (СПбМО, 1995). Пусть  $H$  — ортоцентр остроугольного треугольника  $ABC$ ;  $D$  — середина стороны  $AC$ . Прямая, проходящая через  $H$  перпендикулярно отрезку  $DH$ , пересекает стороны  $AB$  и  $BC$  в точках  $E$  и  $F$ . Докажите, что  $|HE| = |HF|$ .

**РЕШЕНИЕ.** Примем описанную около треугольника  $ABC$  окружность за единичную. Иницилируем процесс вычислений, положив

$$A = z_1, \quad B = z_2, \quad C = z_3, \quad (1)$$

где  $z_1, z_2, z_3$  — некоторые комплексные числа, по модулю равные единице. Далее можно однозначно определить (далее будем писать — вычислить) точки  $D, H, E$  и  $F$ :

$$D = \frac{z_1 + z_3}{2}, \quad H = z_1 + z_2 + z_3, \\ E = \frac{2z_1^2 + 3z_1z_2 + 2z_1z_3 + z_2z_3}{z_1 - z_3}, \quad F = \frac{2z_3^2 + 3z_3z_2 + 2z_3z_1 + z_2z_1}{z_3 - z_1}$$

(выражение для  $F$  получается из выражения для  $E$  заменой  $z_1$  на  $z_3$  и наоборот). Осталось убедиться, что в том, что  $|HE|^2 = |HF|^2$ . Действительно,

$$|HE|^2 = -\frac{(z_1 + z_3)^2(z_1 + z_3 + 2z_2)(z_2(z_1 + z_3) + 2z_1z_3)}{(z_1 - z_3)^2z_1z_2z_3} = |HF|^2,$$

и решение завершено. □

В книге [7] имеется целых три обычных (синтетических) решения этой задачи, но ни одно из них нельзя считать достаточно простым и очевидным. Некоторые из этих решений явно используют условие остроугольности треугольника  $ABC$ , но, как теперь ясно, оно не по-существу.<sup>3)</sup>

Если в задаче речь идёт только о треугольнике (что часто бывает), то следует иметь в виду одно важное обстоятельство: не все элементы треугольника можно рационально выразить через его вершины. Это относится прежде всего к (довольно популярным!) элементам, связанным с центром вписанной окружности — биссектрисам, точкам касания со сторонами и т. п. В таком случае мы рекомендуем за единичную принять окружность, вписанную в треугольник  $ABC$ , и положить

$$T_a = z_1, \quad T_b = z_2, \quad T_c = z_3, \quad (2)$$

где  $T_a, T_b, T_c$  — точки касания вписанной окружности со сторонами  $BC, CA, AB$  соответственно. Тогда, как легко проверить,

$$A = \frac{2z_2z_3}{z_2 + z_3}, \quad B = \frac{2z_3z_1}{z_3 + z_1}, \quad C = \frac{2z_1z_2}{z_1 + z_2}. \quad (3)$$

Разумеется, это приведёт к более громоздким выражениям для элементов треугольника, рационально выражаемым через его вершины, однако эти выражения останутся рациональными (см. Приложение, п. Б).

---

<sup>3)</sup>Здесь уместно вспомнить фразу французского философа и математика Ж. Даламбера (1717—1783): «Алгебра щедра — зачастую она даёт больше, чем у неё спрашивают».

**Задача 2** (ММО, 2001). В треугольнике  $ABC$  точка  $I$  — центр вписанной окружности,  $I'$  — центр окружности, касающейся стороны  $AB$  и продолжений сторон  $CB$  и  $CA$ ;  $L$  и  $L'$  — точки, в которых сторона  $AB$  касается этих окружностей. Докажите, что прямые  $IL'$ ,  $I'L$  и высота  $CH$  треугольника  $ABC$  пересекаются в одной точке.

**РЕШЕНИЕ.** Примем за начало вычислений (2) и как следствие получим (3). Приведём результаты дальнейших вычислений:

$$I' = \frac{4z_1z_2z_3}{(z_1+z_3)(z_2+z_3)}, \quad L' = \frac{z_3(3z_1z_2+z_3z_1+z_3z_2-z_3^2)}{(z_1+z_3)(z_2+z_3)}, \quad H = \frac{z_1z_2+z_2+z_3+z_3z_1-z_3^2}{z_1+z_2}.$$

Разумеется,  $L = T_c = z_3$ . Непосредственная проверка показывает, что указанные в условии три прямые действительно конкурентны: они пересекаются в точке

$$M = \frac{3z_1z_2+z_3z_1+z_3z_2-z_3^2}{2(z_1+z_2)},$$

которая, кстати, оказывается серединой высоты  $CH$ . □

Механический способ замечателен ещё и тем, что для него не существует сложных геометрических задач рационального типа (если, конечно, пренебречь возможной сложностью алгебраических преобразований). Убедиться в этом нетрудно на примере решения олимпиадных задач самого высокого уровня.

**Задача 3** (41-я IMO, 2000). Пусть  $AH_1$ ,  $BH_2$ ,  $CH_3$  — высоты остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность, вписанная в треугольник  $ABC$ , касается сторон  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  в точках  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  соответственно. Прямые  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$  являются образами прямых  $H_2H_3$ ,  $H_3H_1$ ,  $H_1H_2$  при симметрии относительно прямых  $T_2T_3$ ,  $T_3T_1$ ,  $T_1T_2$  соответственно. Докажите, что прямые  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$  образуют треугольник с вершинами на окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ .

**РЕШЕНИЕ.** В наших обозначениях  $T_1 = T_a$  и т. д. Стартуя с (2), найдем

$$H_1 = \frac{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1-z_1^2}{z_2+z_3}, \quad H_2 = \frac{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1-z_2^2}{z_3+z_1}, \quad H_3 = \frac{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1-z_3^2}{z_1+z_2}.$$

Пусть  $A_1$  — точка пересечения прямых  $l_2$  и  $l_3$ . Тогда (мы опускаем промежуточные вычисления образов точек  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  при симметриях относительно указанных прямых)

$$A_1 = \frac{z_2z_3}{z_1}$$

и ясно, что точка  $A_1$  лежит на единичной окружности. □

Во многих задачах встречается комбинация нескольких геометрических фигур. Типичная пример такой комбинации — треугольник и окружность.

**Задача 4** (36-я IMO, 1985). Окружность с центром в точке  $O$  проходит через вершины  $A$  и  $C$  треугольника  $ABC$  и пересекает его стороны  $AB$  и  $BC$  в точках  $K$  и  $N$  соответственно. Пусть  $M$  — точка пересечения описанных окружностей треугольников  $ABC$  и  $BKN$ , отличная от  $B$ . Докажите, что  $\angle OMB = 90^\circ$ .

РЕШЕНИЕ. Можно начать вычисления с (1), однако этого недостаточно — необходимо ввести ещё один (вещественный) параметр  $u$ , чтобы определить положение точки  $O$  как лежащей на серединном перпендикуляре к отрезку  $AC$ :

$$O = \frac{z_1 + z_3}{2} + iu(z_1 - z_3).$$

Теперь можно вычислить точки  $K$ ,  $N$  и  $O_1$  (вспомогательная точка, являющаяся центром описанной окружности треугольника  $BKN$ ):

$$\begin{aligned} K &= \frac{-2iuz_1z_2 + 2iuz_1z_3 + 2iuz_2z_3 - 2iuz_3^2 - z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 + z_3^2}{2z_3}, \\ N &= \frac{2iuz_1^2 - 2iuz_1z_2 - 2iuz_1z_3 + 2iuz_2z_3 + z_1^2 + z_1z_2 + z_1z_3 - z_2z_3}{2z_1}, \\ O_1 &= \frac{2iuz_1 - 2iuz_3 + z_1 + 2z_2 + z_3}{2}. \end{aligned}$$

Точка  $M$  вычисляется как симметричная точке  $B$  относительно линии центров — прямой, проходящей через начало координат и точку  $O_1$ :

$$M = \frac{z_1z_3(2uz_1 - iz_1 - 2iz_2 - 2uz_3 - iz_3)}{2uz_1z_2 - iz_1z_2 - 2iz_1z_3 - 2uz_2z_3 - iz_2z_3}.$$

Осталось убедиться в том, что векторы  $v = \overrightarrow{MO}$  и  $w = \overrightarrow{MB}$  перпендикулярны.  $\square$

При решении следующей задачи приходится немного подумать над исходными данными (как ввести систему координат и с чего начинать вычисления).

**Задача 5** (41-я IMO, 2000). Окружности  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  пересекаются в точках  $M$  и  $N$ . Прямая  $l$  — общая касательная к  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  — такова, что  $M$  расположена к  $l$  ближе, чем  $N$ . Прямая  $l$  касается  $\gamma_1$  в точке  $A$ , а  $\gamma_2$  — в точке  $B$ . Прямая, проходящая через  $M$  параллельно  $l$ , пересекает вторично окружность  $\gamma_1$  в точке  $C$ , а окружность  $\gamma_2$  — в точке  $D$ . Прямые  $CA$  и  $DB$  пересекаются в точке  $E$ , прямые  $AN$  и  $CD$  — в точке  $P$ , прямые  $BN$  и  $CD$  — в точке  $Q$ . Докажите, что  $|EP| = |EQ|$ .

РЕШЕНИЕ. Примем окружность  $\gamma_1$  за единичную и положим

$$A = i, \quad B = u + i, \quad N = z_1,$$

где  $u$  — действительное число. Остальные точки уже можно вычислить:

$$\begin{aligned} M &= \frac{-u + 2z_1 - 2i}{uz_1 - 2iz_1 - 2}, \quad C = \frac{uz_1 - 2iz_1 - 2}{u - 2z_1 + 2i}, \\ D &= \frac{2u^2 - 3uz_1 + 4iu - 2iz_1 - 2}{u - 2z_1 + 2i}, \quad E = \frac{-uz_1 + 2iu - 2iz_1 - 2}{u - 2z_1 + 2i}, \\ P &= \frac{u^2z_1^2 - 2iuz_1^2 - 2iu - 4z_1^2 + 8iz_1 + 4}{(uz_1 - 2iz_1 - 2)(u - 2z_1 + 2i)}, \\ Q &= \frac{-u^2z_1^2 - 2u^2 + 2iuz_1^2 + 8uz_1 - 6iu - 4z_1^2 + 8iz_1 + 4}{(uz_1 - 2iz_1 - 2)(u - 2z_1 + 2i)}. \end{aligned}$$

Теперь осталось механически проверить, что  $|EP|^2 = |EQ|^2$ .  $\square$



**Задача 6** (45-я IMO, 2004). Пусть  $ABC$  — остроугольный треугольник с  $|AB| \neq |AC|$ . Окружность с диаметром  $BC$  пересекает стороны  $AB$  и  $AC$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно. Обозначим через  $O$  середину стороны  $BC$ . Биссектрисы углов  $\angle BAC$  и  $\angle MON$  пересекаются в точке  $R$ . Докажите, что окружности, описанные около треугольников  $BMR$  и  $CNR$ , имеют общую точку, принадлежащую стороне  $BC$ .

РЕШЕНИЕ. Приняв (2) и получив (3), далее вычислим точки  $M$ ,  $N$ ,  $O$ :

$$M = \frac{z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 - z_3^2}{z_1 + z_2}, \quad N = \frac{z_1 z_2 + z_1 z_3 - z_2^2 + z_2 z_3}{z_1 + z_3},$$

$$O = \frac{z_1(z_1 z_2 + z_1 z_3 + 2z_2 z_3)}{(z_1 + z_2)(z_1 + z_3)}.$$

Но как вычислить точку  $R$ ? В общей ситуации этого сделать, вообще говоря, нельзя, но здесь выручает то обстоятельство, что треугольник  $MON$  является *равнобедренным*, поэтому  $R$  можно получить как точку пересечения биссектрисы угла  $\angle BAC$  с прямой, проходящей через  $O$  перпендикулярно  $MN$ :

$$R = \frac{z_1^2 z_2 + z_1^2 z_3 + 2z_1 z_2 z_3 + z_2^2 z_3 + z_2 z_3^2}{z_1^2 + z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3}.$$

Обозначим через  $O_1$  и  $O_2$  центры окружностей, описанных около треугольников  $BMR$  и  $CNR$  соответственно. Тогда

$$O_1 = \frac{z_1(z_1^3 z_2 + z_1^3 z_3 + 2z_1^2 z_2 z_3 + z_1 z_2^2 z_3 + 3z_1 z_2 z_3^2 + 2z_2^2 z_3^2)}{(z_1^2 + z_2 z_3)(z_1 + z_2)(z_1 + z_3)},$$

$$O_2 = \frac{z_1(z_1^3 z_2 + z_1^3 z_3 + 2z_1^2 z_2 z_3 + 3z_1 z_2^2 z_3 + z_1 z_2 z_3^2 + 2z_2^2 z_3^2)}{(z_1^2 + z_2 z_3)(z_1 + z_2)(z_1 + z_3)}.$$

Вторая точка пересечения этих окружностей есть

$$R_1 = \frac{2z_1 z_2 z_3}{z_1^2 + z_2 z_3}.$$

Осталось убедиться, что точка  $R_1$  лежит на прямой  $BC$ . □

ЗАМЕЧАНИЕ. Между прочим,  $R_1$  — это основание биссектрисы угла  $\angle BAC$  (см. Приложение, п. Б).

Отметим, что во всех рассмотренных выше примерах вычисления — главная составляющая механического метода — проводились в поле рациональных дробей с коэффициентами из  $\mathbb{Q}(i)$ . Иногда в условии задачи отдельные элементы геометрических фигур могут быть конкретизированы. Так, например, некоторые углы могут иметь фиксированные величины, обычно соизмеримые с  $\pi = 180^\circ$ . В таком случае при вычислениях придётся иметь дело с рациональными выражениями, имеющими коэффициенты из более широкого поля  $\mathbb{Q}(i, \zeta)$ , где  $\zeta$  — корень некоторой степени из единицы. Проиллюстрируем это на примере решения задачи 258 из книги [3].

**Задача 7.** Докажите, что если в треугольнике один из углов равен  $120^\circ$ , то треугольник, образованный основаниями его биссектрис, прямоугольный.

РЕШЕНИЕ. Пусть дан треугольник  $ABC$ . Принимая (2), условие

$$\angle CAB = 120^\circ \quad (4)$$

можно записать как  $z_3 = \zeta z_2$ , где

$$\zeta = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ.$$

Для дальнейших вычислений важно, что  $\zeta$  удовлетворяет неприводимому уравнению

$$\zeta^2 - \zeta + 1 = 0$$

и, таким образом, можно всюду  $\zeta^2$  заменять на  $\zeta - 1$ .

Для упрощения выкладок имеет смысл положить  $z_2 = 1$ ; тогда для оснований биссектрис  $A_1, B_1, C_1$  треугольника  $ABC$  получим следующие формулы:

$$A_1 = \frac{2\zeta z_1}{(z_1 + 1 - \zeta)(z_1 - 1 + \zeta)}, \quad B_1 = \frac{2z_1}{z_1 + 1 - \zeta}, \quad C_1 = \frac{2\zeta z_1}{z_1 - 1 + \zeta}.$$

Убедимся теперь в перпендикулярности векторов  $v = \overrightarrow{A_1 B_1}$  и  $w = \overrightarrow{A_1 C_1}$  (т. е. что в треугольнике  $A_1 B_1 C_1$  угол при вершине  $A_1$  — прямой). Действительно, имеем

$$\frac{w}{v} = \frac{\zeta z_1 - \zeta + 1}{z_1 - 1},$$

и нетрудно проверить, что последняя величина является чисто мнимой.  $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если длины сторон треугольника  $ABC$  равны  $a, b, c$ , то, используя лишь теорему косинусов и основное свойство биссектрисы, можно вычислить квадраты длин сторон треугольника, образованного основаниями биссектрис:

$$|A_1 B_1|^2 = ab \left( ab \left( \frac{1}{(a+c)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} \right) - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{(a+c)(b+c)} \right)$$

и аналогично для  $|B_1 C_1|$  и  $|C_1 A_1|$ . В качестве следствия получаем равенство

$$|B_1 C_1|^2 + |C_1 A_1|^2 - |A_1 B_1|^2 = \frac{2abc^2(a^2 + b^2 + ab - c^2)}{(a+b)^2(a+c)(b+c)}.$$

Теперь видно, что условие

$$c^2 = a^2 + b^2 + ab,$$

эквивалентное условию (4), является необходимым и достаточным для выполнения равенства  $\angle C_1 A_1 B_1 = 90^\circ$ .<sup>4)</sup>

Ещё один пример на ту же тему — задача 251 из книги [3].

**Задача 8.** Внутри треугольника  $ABC$  взята точка  $M$  так, что  $\angle MBA = 30^\circ$ ,  $\angle MAB = 10^\circ$ . Найдите  $\angle AMC$ , если  $\angle ACB = 80^\circ$  и  $|AC| = |BC|$ .

<sup>4)</sup>В книге [3] приводится ещё одно, очень простое и изящное, геометрическое решение, основанное на том факте, что  $A_1 B_1$  и  $A_1 C_1$  — биссектрисы углов  $AA_1 C$  и  $AA_1 B$  соответственно.

РЕШЕНИЕ. Мы докажем, что  $|AM| = |AC|$  (тем самым треугольник  $AMC$  оказывается равнобедренным и  $\angle AMC = 70^\circ$ ).

Пусть система координат выбрана так, что  $A = 0$ ,  $B = 1$ . Положим

$$\zeta = \cos 10^\circ + i \sin 10^\circ.$$

Можно показать, что это число удовлетворяет неприводимому уравнению

$$\zeta^{12} - \zeta^6 + 1 = 0.$$

Точки  $C$  и  $M$  получаются как точки пересечения пар прямых  $l(A, \zeta^5)$ ,  $l(B, \zeta^{13})$  и  $l(A, \zeta)$ ,  $l(B, \zeta^{15})$  соответственно. Имеем

$$C = f_1(\zeta) = \frac{2\zeta^{10} + \zeta^8 - \zeta^6 - \zeta^4 + \zeta^2 + 2}{3}, \quad M = f_2(\zeta) = \frac{-\zeta^{10} - 2\zeta^8 + 2\zeta^6 + 2\zeta^4 + \zeta^2 - 1}{3}.$$

Как показывает проверка, отношение  $f_1(\zeta)/f_2(\zeta)$  равно  $\zeta^4$ . В частности,  $|AM| = |AC|$ .  $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. В проделанных вычислениях нам было важно только то, что  $\zeta$  — *какой-то* корень (неприводимого!) многочлена  $\Phi_{36}(x) = x^{12} - x^6 + 1$ . Считая, например, что

$$\zeta = \cos 70^\circ + i \sin 70^\circ,$$

мы получили бы доказательство такого геометрического факта:

*Вне треугольника  $ABC$  взята точка  $M$  так, что  $\angle MBA = 30^\circ$ ,  $\angle MAB = 70^\circ$  (точки  $C$  и  $M$  лежат по разные стороны от прямой  $AB$ ). Тогда  $|AM| = |AC|$ .*

Таким образом, вместе с исходной одновременно решена ещё одна, схожая с ней, но всё же *геометрически* другая задача.

Одно из основных предназначений механического метода — это проверка (доказательство либо опровержение) различных гипотез. Приведём несколько примеров.

**Пример 1.** (См. статью [8].) *Окружность, проходящая через основания биссектрис некоторого треугольника, касается одной из его сторон. Верно ли, что этот треугольник — равнобедренный?*

Покажем, что, вообще говоря, это не так. Как обычно, когда речь идёт о биссектрисах треугольника, возьмём за основу равенства (2). Можно проверить, что при  $z_1 = 1$  и  $z_2, z_3$ , связанных уравнением

$$z_3^3(z_2 - 1) + z_3^2(-2z_2^2 + 1) + z_3z_2(z_2^2 - 2) + z_2^2(-z_2 + 1) = 0, \quad (5)$$

окружность, проходящая через основания биссектрис треугольника, будет касаться одной из сторон (той, что содержит точку  $T_a$ ). При этом, конечно, нужно следить за тем, чтобы треугольник с вершинами в точках  $T_a, T_b, T_c$  оставался *остроугольным* (иначе вписанная окружность в действительности окажется одной из внеписанных окружностей). Это условие будет выполнено, например, при

$$z_2 = -4/5 + 3i/5$$

(при таком значении  $z_2$  уравнение (5) имеет одним из корней  $z_3 \approx -0.997 - 0.074 \cdot i$ ).

**Пример 2.** (См. [3], задача 500 на стр. 61.) Треугольник, образованный основаниями биссектрис некоторого треугольника, является равнобедренным. Верно ли, что исходный треугольник — равнобедренный?

И здесь ответ тот же: вообще говоря, нет. При  $z_1 = 1$  и  $z_2, z_3$ , связанных уравнением

$$z_3^3(z_2 - 1) + z_3^2 + z_3z_2^3 + z_2^2(-z_2 + 1) = 0, \quad (6)$$

получим треугольник, удовлетворяющий условию. Например, при

$$z_2 = -3/5 + 4i/5$$

уравнение (6) имеет корень  $z_3 \approx -0.913 - 0.406 \cdot i$ , что и даёт искомый контрпример.

## §4. Модуль **geom**

При решении задач предыдущего параграфа мы использовали созданный нами на базе системы компьютерной алгебры MAPLE модуль **geom**, содержащий набор основных функций и тестов, применяемых при доказательстве планиметрических теорем рационального типа. Приведём примеры таких функций и тестов.

**Collinear(a,b)** — тест на коллинеарность векторов  $a$  и  $b$ .

**Concyclic(P,Q,R,S)** — тест на принадлежность точек  $P, Q, R, S$  одной окружности.

**Perpendicular(a,b)** — тест на перпендикулярность векторов  $a$  и  $b$ .

**Similar(A,B,C,P,Q,R)** — тест на подобие 1-го рода треугольников  $ABC$  и  $PQR$ .

**Tangent(P,a,Q,R)** — тест на касание прямой  $l(P,a)$  и окружности  $c(Q,R)$ .

**area(A,B,C)** — вычисляется ориентированная площадь треугольника  $ABC$ .

**center(P,Q,R)** — вычисляется центр окружности, проходящей через точки  $P, Q, R$ .

**centroid(A,B,C)** — вычисляется центр масс (точка пересечения медиан) треугольника  $ABC$ .

**conjugate(X)** — вычисляется выражение, комплексно сопряженное к выражению  $X$ .

**intersection(P,a,Q,b)** — вычисляется точка пересечения прямых  $l(P,a)$  и  $l(Q,b)$ .

**orthocenter(A,B,C)** — вычисляется ортоцентр (точка пересечения высот) треугольника  $ABC$ .

**reflection(Z,P,a)** — вычисляется точка, симметричная точке  $Z$  относительно прямой  $l(P,a)$ .

Функция **conjugate** явно или неявно задействована во всех других тестах и функциях, поэтому поясним, как она работает. Предполагается, что в (рациональных!) выражениях, подвергающихся комплексному сопряжению, участвуют *специальные переменные*  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , пробегающие единичную окружность (обычно вполне достаточно 6 специальных переменных, именно такое значение  $n$  принято по умолчанию в **conjugate**). Все остальные переменные, если таковые имеются, считаются *действительными*. Сопряжение данного выражения состоит в замене всех специальных переменных  $z_k$  на  $z_k^{-1}$ , при этом мнимая единица  $i$  заменяется на  $-i$ .

Несложное программирование остальных процедур (фактически «вбивание формул») основано на утверждениях 1—19 из §2. Следует, однако, предупредить о необходимости

«ручного» учёта ограничений этих утверждений. Так, находя точку пересечения двух прямых, предварительно нужно убедиться в том, что эти прямые не являются параллельными (подобные проверки не включены в процедуры).

В Приложении, п. А, читатель может найти конкретные примеры реализации процедур модуля `geom`.

## Заключение

Традиционное (т. е. синтетическое) решение геометрической задачи является, как правило, результатом довольно длительных размышлений и доступно отнюдь не каждому. Механическое решение (там, где оно возможно) — всего лишь определённая последовательность вычислений, для составления которой обычно не требуется никакого труда. Решение геометрической задачи мы сводим, таким образом, к преобразованию некоторых рациональных алгебраических выражений. Эти выражения иногда оказываются довольно громоздкими, поэтому наличие компьютера с системой компьютерной алгебры может существенно облегчить проведение необходимых вычислений. Решать сложнейшие геометрические задачи становится под силу каждому, для этого нужны лишь элементарная алгебраическая грамотность и, к великому сожалению истинных любителей геометрии, минимум геометрических познаний. (А хорошо ли это? Этот дискуссионный вопрос носит философский характер, и мы его здесь обсуждать не будем.) Единственное, над чем всё-таки необходимо будет задуматься — это с чего начать вычисления (стартовые параметры должны быть такими, чтобы через них можно было и притом рациональным образом выразить всё, что упоминается в условии задачи). Как правило, проблема инициализации вычислений не имеет однозначного решения и требует творческого подхода. Так, например, в произвольной задаче про треугольник можно начать вычисления с одной из трёх параметризаций: тривиальной (1), « $T$ -параметризации» (2) или, в наиболее сложных случаях, « $W$ -параметризации» (I) (см. Приложение, п. Б); какой из них будет достаточно для успешного решения задачи механическим методом, зависит от конкретной задачи.<sup>5)</sup>

Конечно, при таком подходе геометрия как таковая в решении задач исчезает. А это существенный недостаток механического метода: ведь понять, *почему* указанная в задаче ситуация имеет место (а не просто убедиться в том, что это действительно так), этот метод не позволяет.

## Список литературы

- [1] Моденов П.С. Задачи по геометрии. М.: Наука, 1979.
- [2] Шарыгин И.Ф. Задачи по геометрии. (Планиметрия). М.: Наука, 1986.

---

<sup>5)</sup>При решении задачи 9 (см. Приложение, п. Б) мы применили « $T$ -параметризацию», поскольку все нужные для решения формулы в терминах этой параметризации уже были заготовлены. На самом деле можно было бы обойтись и тривиальной параметризацией: положив  $A = z_1$ ,  $B = z_2$ ,  $C = z_3$  и  $P = z_4$ , где  $|z| = 1$ , мы получили бы

$$H = z_1 + z_2 + z_3, \quad E = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{2}, \quad Q = \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{2},$$

откуда  $|Q - E| = 1/2$ .

- [3] Шарыгин И.Ф. Геометрия. 9—11 кл.: От учебной задачи к творческой: Пособие для учащихся. М.: Дрофа, 2001.
- [4] Прасолов В.В. Задачи по планиметрии: Учебное пособие. М.: МЦНМО: ОАО «Московские учебники», 2006.
- [5] Понарин Я.П. Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах: Книга для учащихся математических классов школ, учителей и студентов педагогических вузов. М.: МЦНМО, 2004.
- [6] <http://www.maplesoft.com>
- [7] Берлов С.Л., Иванов С.В., Кохась К.П. Петербургские математические олимпиады. СПб.: Изд-во «Лань», 1998.
- [8] Куланин Е. Об одной трудной геометрической задаче // Квант. 1992. № 7. С. 46—50.
- [9] Зетель С.И. Новая геометрия треугольника. М.: Учпедгиз, 1940.
- [10] Коксетер Г.С.М., Грейтцер С.Л. Новые встречи с геометрией. М.: Наука, 1978.
- [11] Прасолов В.В. Точки Брокера и изогональное сопряжение. М.: МЦНМО, 2000.

## Приложение

### А. Примеры реализации процедур модуля `geom`

Следующие примеры позволят читателю получить представление о стиле реализации процедур модуля `geom`.

#### 1. Функция `conjugate`

```
conjugate:=X->factor(subs(seq(z[k]=1/z[k],k=1..6),I=-I,X));
```

#### 2. Функция `intersection`

```
intersection:=(P,a,Q,b)->factor((a*(Q*conjugate(b)-b*conjugate(Q))-
-b*(P*conjugate(a)-conjugate(P)*a))/(a*conjugate(b)-conjugate(a)*b));
```

#### 3. Функция `center`

```
center:=(P,Q,R)->intersection((P+Q)/2,I*(P-Q),(Q+R)/2,I*(Q-R));
```

#### 4. Тест `Collinear`

```

Collinear:=proc(a,b)
if
factor(a*conjugate(b)-conjugate(a)*b)=0
then return TRUE else return FALSE
end if
end proc;

```

## 5. Тест Conccyclic

```

Conccyclic:=proc(P,Q,R,S)
if
factor((P-R)*(Q-S)/(Q-R)/(P-S)-conjugate((P-R)*(Q-S)/(Q-R)/(P-S)))=0
then return TRUE else return FALSE
end if
end proc;

```

## Б. Треугольник на языке комплексных чисел

Пусть на комплексной плоскости задан треугольник  $ABC$ , при этом начало координат совпадает с центром  $I$  его вписанной окружности, а точки касания

$$T_a = z_1, \quad T_b = z_2, \quad T_c = z_3$$

последней со сторонами  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  треугольника предполагаются удалёнными от  $I$  на расстояние  $r = 1$  (т. е. вписанная окружность — единичная).

Ниже мы приводим формулы, которые представляют некоторые элементы треугольника  $ABC$  как рациональные функции от  $z_1, z_2, z_3$ . Через  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  обозначены элементарные симметрические многочлены от  $z_1, z_2, z_3$ :

$$\sigma_1 = z_1 + z_2 + z_3, \quad \sigma_2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1, \quad \sigma_3 = z_1z_2z_3.$$

Из геометрических соображений треугольник  $T_aT_bT_c$  должен быть *остроугольным*. Мы дополнительно предположим, что этот треугольник *положительно ориентирован*.

### 1. Вершины:

$$A = \frac{2z_2z_3}{z_2 + z_3}.$$

(Здесь и в дальнейшем, когда речь идёт о трёх элементах треугольника одинаковой природы, формула приводится только для одного из них, формулы для двух других получаются *циклической перестановкой* переменных  $z_1, z_2, z_3$ .)

### 2. Основания медиан:

$$M_a = \frac{z_1^2(z_2 + z_3) + 2\sigma_3}{z_1^2 + \sigma_2}.$$

### 3. Основания высот:

$$H_a = \frac{\sigma_2 - z_1^2}{z_2 + z_3}.$$

4. Основания биссектрис:

$$B_a = \frac{2\sigma_3}{z_1^2 + z_2 z_3}.$$

5. Центр масс (центроид):

$$G = \frac{2(\sigma_2^2 + \sigma_1 \sigma_3)}{3(\sigma_1 \sigma_2 - \sigma_3)}.$$

6. Ортоцентр:

$$H = \frac{2(\sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_3)}{\sigma_1 \sigma_2 - \sigma_3}.$$

7. Центр описанной окружности:

$$O = \frac{2\sigma_1 \sigma_3}{\sigma_1 \sigma_2 - \sigma_3}.$$

8. Точки Эйлера (середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами):

$$E_a = \frac{\sigma_2 z_2 z_3 - \sigma_3(z_2 + z_3) + \sigma_2^2}{\sigma_1 \sigma_2 - \sigma_3}.$$

9. Центр окружности Эйлера (окружности девяти точек):

$$N = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1 \sigma_2 - \sigma_3}.$$

10. Центры вневписанных окружностей:

$$I_a = \frac{4\sigma_3}{z_1^2 + \sigma_2}.$$

11. Точки касания вневписанных окружностей со сторонами:

$$T'_a = \frac{2\sigma_3 + z_1 \sigma_2 - z_1^3}{z_1^2 + \sigma_2}.$$

12. Точки Фейербаха (см. [9, с. 38]):

$$F = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \quad F_a = N - \frac{\sigma_2 - 2z_2 z_3}{\sigma_1 - 2z_1} R_N,$$

где  $R_N$  — радиус окружности Эйлера.

13. Точка Лемуана (см. [9, с. 64]):

$$K = \frac{2\sigma_3(\sigma_1^2 \sigma_2 - 3\sigma_1 \sigma_3 - 2\sigma_2^2)}{-2\sigma_1^3 \sigma_3 + \sigma_1^2 \sigma_2^2 + 4\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 - 2\sigma_2^3 - 9\sigma_3^2}.$$

14. Точка Жергонна (см. [9, с. 6]):

$$Ge = \frac{2(\sigma_2^2 - 3\sigma_1 \sigma_3)}{\sigma_1 \sigma_2 - 9\sigma_3}.$$



15. Точка Нагеля (см. [9, с. 11]):

$$Na = \frac{2(\sigma_2^2 + \sigma_1\sigma_3)}{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3}.$$

16. Точка Спикера (центр тяжести замкнутой ломаной  $ABC$ ):

$$Sp = \frac{\sigma_2^2 + \sigma_1\sigma_3}{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3}.$$

17. Точки Ферма (см. [9, с. 91], [10, с. 103]):

$$F'_\pm = \frac{2(\zeta^{\pm 1} - 2)}{3} \cdot \frac{z_1^2 z_2 - z_1 z_2^2 + (\zeta^{\pm 1} - 1)(z_2^2 z_3 - z_2 z_3^2) - \zeta^{\pm 1}(z_3^2 z_1 - z_3 z_1^2)}{z_1^2 + (\zeta^{\pm 1} - 1)z_2^2 - \zeta^{\pm 1}z_3^2},$$

где  $\zeta = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ$ .<sup>6)</sup>

18. Точки Брокара (см. [11]):

$$B^{(1)} = \frac{2\sigma_3(z_1^3 z_2 + z_2^3 z_3 + z_3^3 z_1 - \sigma_1\sigma_3)}{z_1^4 z_2^2 + z_2^4 z_3^2 + z_3^4 z_1^2 - 3\sigma_3^2}, \quad B^{(2)} = \frac{2\sigma_3(z_1 z_2^3 + z_2 z_3^3 + z_3 z_1^3 - \sigma_1\sigma_3)}{z_1^2 z_2^4 + z_2^2 z_3^4 + z_3^2 z_1^4 - 3\sigma_3^2}.$$

19. Изогональное сопряжение (см. [11]):

$$z \mapsto \frac{2\sigma_3(\sigma_1 z \bar{z} - 2z - \sigma_3 \bar{z}^2)}{(\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3)z\bar{z} - 2\sigma_2 z - 2\sigma_1\sigma_2 \bar{z} + 4\sigma_3}.$$

Мы можем рационально выразить через  $z_1, z_2, z_3$  некоторые метрические параметры, связанные с треугольником  $ABC$  (а не только их квадраты!).

20. Расстояния от вершин до точек касания вписанной окружности со сторонами:

$$|AT_b| = |AT_c| = i \frac{z_2 - z_3}{z_2 + z_3}.$$

21. Радиус описанной окружности и радиусы вневписанных окружностей:

$$R = -\frac{2z_1 z_2 z_3}{(z_1 + z_2)(z_2 + z_3)(z_3 + z_1)}, \quad r_a = -\frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_1)}{(z_1 + z_2)(z_3 + z_1)}.$$

22. Радиус окружности Эйлера:  $R_N = R/2$ .

23. Длины сторон:

$$a = -2i \frac{z_1(z_2 - z_3)}{(z_2 + z_1)(z_3 + z_1)}.$$

---

<sup>6)</sup>Три прямые, соединяющие вершины треугольника с соответствующими вершинами «внешних» подобных равнобедренных треугольников (построенных на сторонах исходного треугольника как на основаниях), пересекаются в одной точке. Если строятся равносторонние треугольники, то этой точкой как раз и будет  $F'_+$ . Разумеется, аналогичное утверждение справедливо и для точки  $F'_-$ .

24. Длины высот:

$$h_a = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_1)}{z_1(z_2 + z_3)}.$$

25. Площадь и полупериметр:

$$S = p = -i \frac{(z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1)}{(z_1 + z_2)(z_2 + z_3)(z_3 + z_1)}.$$

26. Косинусы и синусы углов при вершинах:

$$\cos \angle CAB = -\frac{1}{2} \left( \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_2} \right), \quad \sin \angle CAB = -\frac{1}{2i} \left( \frac{z_2}{z_3} - \frac{z_3}{z_2} \right).$$

27. Котангенс угла Брокара:

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{4\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 2\sigma_1^3\sigma_3 + \sigma_1^2\sigma_2^2 - 9\sigma_3^2 - 2\sigma_2^3}{z_1^4z_2^2 + z_2^4z_3^2 + z_3^4z_1^2 - z_1^2z_2^4 - z_2^2z_3^4 - z_3^2z_1^4} i.$$

В деле рационализации различных расстояний, связанных с треугольником  $ABC$ , можно пойти дальше. Обозначим через

$$W_a = w_1, \quad W_b = w_2, \quad W_c = w_3 \quad (\text{I})$$

точки пересечения отрезков  $AI$ ,  $BI$ ,  $CI$  со вписанной окружностью. Как и  $T_aT_bT_c$ , треугольник  $W_aW_bW_c$  также должен быть остроугольным и положительно ориентированным, при этом (см. пример 34 на стр. 190 книги [1])

$$T_a = -\frac{w_2w_3}{w_1}, \quad T_b = -\frac{w_3w_1}{w_2}, \quad T_c = -\frac{w_1w_2}{w_3}.$$

Через  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $w_3$  можно дополнительно рационально выразить:

28. Косинусы и синусы половинных углов при вершинах:

$$\cos \frac{1}{2} \angle CAB = -\frac{1}{2i} \left( \frac{w_2}{w_3} - \frac{w_3}{w_2} \right), \quad \sin \frac{1}{2} \angle CAB = -\frac{1}{2} \left( \frac{w_2}{w_3} + \frac{w_3}{w_2} \right).$$

29. Расстояния от вершин до центра вписанной окружности:

$$|AI| = -\frac{2w_2w_3}{w_2^2 + w_3^2}.$$

30. Длины биссектрис:

$$l_a = -\frac{2w_2w_3(w_1^2 - w_2^2)(w_1^2 - w_3^2)}{(w_1^4 + w_2^2w_3^2)(w_2^2 + w_3^2)}.$$

Формулы 1 — 30 позволяют легко доказывать (а иногда и обнаруживать) многие геометрические факты.

Так, например, очевидны равенства

$$G = \frac{H + 2O}{3}, \quad N = \frac{H + O}{2}, \quad G = \frac{Na}{3}, \quad Sp = \frac{Na}{2}.$$

В частности, точки  $O, G, N, H$  лежат на одной прямой (прямая Эйлера); это верно и для точек  $I, G, Sp, Na$  (прямая Нагеля). Можно проверить, что пары точек  $G$  и  $L$ ,  $H$  и  $O$ ,  $B^{(1)}$  и  $B^{(2)}$  изогонально сопряжены.<sup>7)</sup>

Мы можем также доказать некоторые метрические соотношения в треугольнике. Например, классическое соотношение, принадлежащее Эйлеру:

$$|IO|^2 = R^2 - 2Rr.$$

Или что-нибудь более экзотическое:

$$|IG|^2 = \frac{p^2 + 5r^2 - 16Rr}{9}, \quad \frac{1}{r^3} = \frac{1}{r_a^3} + \frac{1}{r_b^3} + \frac{1}{r_c^3} + \frac{12R}{S^2},$$

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}, \quad \sin^3 \varphi = \sin(\alpha - \varphi) \sin(\beta - \varphi) \sin(\gamma - \varphi),$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  — углы треугольника  $ABC$ .

В качестве заключительного примера продемонстрируем механическое решение задачи 166.П [2] — типичной задачи рационального типа.

**Задача 9.** Докажите, что прямая Симсона, соответствующая точке  $P$ , проходит через одну из точек пересечения прямой  $PH$  с окружностью Эйлера.

РЕШЕНИЕ. Пусть

$$P = O + \zeta R = \frac{2\sigma_3(\sigma_1 - \zeta)}{\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3},$$

где  $|\zeta| = 1$ . Достаточно убедиться, что точка пересечения  $Q$  прямой  $PH$  и прямой Симсона точки  $P$  лежит на окружности Эйлера. Иными словами, нужно проверить, что

$$|Q - N|^2 = R_N^2. \quad (\text{II})$$

Как показывают вычисления,

$$Q = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_3\zeta}{\sigma_2\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{H + P}{2},$$

и равенство (II) действительно имеет место. □

ЗАМЕЧАНИЕ. Геометрическое решение состоит в доказательстве того, что прямая Симсона точки  $P$  проходит через середину отрезка  $PH$ .

Читатель, желающий попрактиковаться в механическом методе и/или пополнить список формул, может решить следующие упражнения.

---

<sup>7)</sup>Отметим кстати, что изогонально сопряжённой к точке  $Na$  является точка  $2\sigma_1\sigma_3/(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_3)$ .

**Упражнение 1.** Найдите в задачниках Шарыгина и Прасолова (см. список литературы):

- а) задачи рационального типа и механически решите их;
- б) метрические соотношения и механически докажите их.

Вот небольшой список номеров задач рационального типа из задачника [3]:

572, 583, 585, 586, 688<sup>8)</sup>, 689<sup>9)</sup>, 702, 704, 712, 717, 724, 727, 729, 733, 761, 771, 776, 778, 779, 786, 787, 788, 794, 795, 802, 807, 825, 840, 842, 844, 855, 901, 904, 920, 922, 924, 925<sup>10)</sup>, 939, 955, 956, 968, 989, 991, 992, 995, 996, 1001, 1002, 1004, 1009, 1018, 1022, 1027, 1030

**Упражнение 2.** Вычислите:

- основания внешних биссектрис;
- ортополюс прямой  $l(P, v)$  (см. [5, с. 24]);
- центры и радиусы окружностей Аполлония (см. [2, с. 56]);
- основания симедиан (см. [9, с. 63]);
- основания внешних симедиан (см. [9, с. 71]);
- направления прямых, антипараллельных прямым  $AB, BC, CA$  (см. [9, с. 48]);
- центр 1-й окружности Лемуана (см. [9, с. 69]);
- радиус 2-й окружности Лемуана (см. [9, с. 70]);
- основания антибиссектрис и центр антибиссектрис (см. [9, с. 72]);
- точки Енжабека (см. [9, с. 75]).

Так, например, выражения для точек Енжабека выглядят следующим образом:

$$J^{(1)} = \frac{2\sigma_3(z_1z_2^3 + z_2z_3^3 + z_3z_1^3 - \sigma_1\sigma_3)}{\sigma_1^3\sigma_3 - 7\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + \sigma_2^3 + 9\sigma_3^2}, \quad J^{(2)} = \frac{2\sigma_3(z_1^3z_2 + z_2^3z_3 + z_3^3z_1 - \sigma_1\sigma_3)}{\sigma_1^3\sigma_3 - 7\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + \sigma_2^3 + 9\sigma_3^2}.$$

**Упражнение 3.** Механически решите следующие задачи, применяя « $T$ -параметризацию» (2) и « $W$ -параметризацию» (I).

• (СП6МО, 2006.) Окружность с центром  $I$  вписана в треугольник  $ABC$  и касается его сторон  $BC, AC, AB$  в точках  $A_1, B_1, C_1$  соответственно. На отрезке  $BC_1$  нашлась точка  $K$  такая, что  $|IK| = |IC|$ . Докажите, что середина  $KC$  лежит на  $A_1C_1$ .

• (СП6МО, 2005.) Биссектриса угла  $A$  треугольника  $ABC$  пересекает вписанную в этот треугольник окружность в точках  $F$  и  $L$ . Точка  $D$  — основание перпендикуляра из точки  $C$  на эту биссектрису.  $K$  — основание перпендикуляра из центра вписанной окружности на  $BD$ . Докажите, что  $F, L, B$  и  $K$  лежат на одной окружности.

• (См. [4], задача 12.92) Пусть  $a < b < c$  — длины сторон треугольника,  $l_a, l_b, l_c$  и  $l'_a, l'_b, l'_c$  — длины его биссектрис и биссектрис внешних углов. Докажите, что

$$\frac{1}{al_al'_a} + \frac{1}{cl_cl'_c} = \frac{1}{bl_bl'_b}.$$

И в заключение — философско-геометрическое

<sup>8)</sup>Решать в следующей редакции: доказать, что прямая  $CP$  делит отрезок  $MK$  в отношении 3 : 1.

<sup>9)</sup>Решать в следующей редакции: доказать, что угол  $OMC$  равен  $15^\circ$ .

<sup>10)</sup>Решать в следующей редакции: доказать, что окружность, проходящая через точки  $P, Q$  и  $R$ , содержит ортоцентр треугольника  $AB_1C_1$ , где  $B_1$  и  $C_1$  — середины сторон  $AC$  и  $AB$ .

**Упражнение 4.** Имеет ли какой-нибудь геометрический смысл точка

$$F^* = 2F - H = \frac{2\sigma_3(\sigma_1^2 - \sigma_2)}{\sigma_1(\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3)},$$

симметричная  $H$  относительно  $F$  и лежащая на описанной окружности?