Механическое решение геометрических задач

Докладчики: Валентина Мошкина, Елена Редченко (11 класс, 2009/2010 уч. год)

Аннотация

В работе средствами компьютерной алгебры проверяются две относительно недавние элементарно-геометрические гипотезы, принадлежащие А. Заславскому. Все вычисления проводятся в среде MAPLE при помощи специализированного модуля geom, в основе работы которого лежит алгебра комплексных чисел. Приводятся другие примеры решения трудных геометрических задач, иллюстрирующие возможности модуля geom.

Введение

Механический метод доказательства геометрических теорем известен уже сравнительно давно (см., например, книгу [1]). Он стал возможен благодаря двум обстоятельствам: во-первых, появлению и совершенствованию *алгоритмов решения систем полиномиальных уравнений* и, во-вторых, бурному развитию как вычислительной техники, так и *систем компьютерной алгебры*, что способствовало эффективной практической реализации этих алгоритмов.

Наиболее часто для механического доказательства теорем элементарной геометрии применяются *алгоритм базисов Грёбнера* и *метод Ву*, который считается более эффективным (получить представление о них можно, например, по книге [2], глава 6; см. также [1]). К сожалению, оба способа достаточно сложны, полны нюансов и требуют изрядной алгебраической культуры.

Между тем существует довольно много содержательных геометрических теорем так называемого *рационального типа*, при механическом доказательстве которых можно обойтись стандартными алгебраическими операциями над *комплексными числами* и тем самым избежать применения «тяжёлой артиллерии коммутативной алгебры» (В. И. Арнольд). Наглядный геометрический смысл этих операций хорошо известен и понятен даже школьнику (см., например, книгу [3]).

Для систематического применения механического метода на основе алгебры комплексных чисел в работе [4] предлагается использовать модуль geom, работающий в среде MAPLE. Целью настоящей работы является усовершенствование модуля geom, а также демонстрация его возможностей при проверке геометрических гипотез и решении сложных геометрических задач. Основные результаты работы — доказательство гипотезы А. Заславского о четырёхугольниках Брокара и опровержение гипотезы А. Заславского и Ф. Нилова о трёх параболах. Кроме этого, в работе приведены механические решения нескольких довольно трудных олимпиадных задач (см. §4).

§1. О модуле geom и его расширенных возможностях

Специализированный модуль geom создан на базе системы компьютерной алгебры MAPLE и содержит в текущей версии следующий набор основных функций и тестов, применяемых при доказательстве планиметрических теорем рационального типа (см. [4]).[1)]

`Collinear(a,b)` [тест на коллинеарность векторов a и b]
`Concurrent(P,a,Q,b,R,c)` [тест на пересечение прямых $l(P,a)$, $l(Q,b)$, $l(R,c)$ в одной точке]
`Concyclic(P,Q,R,S)` [тест на принадлежность точек P, Q, R, S одной окружности]
`Equidistant(P,Q,R,S)` [тест на равенство длин отрезков PQ и RS]
`Perpendicular(a,b)` [тест на перпендикулярность векторов a и b]
`Similar(A,B,C,P,Q,R)` [тест на подобие 1-го рода треугольников ABC и PQR]
`Similar2(A,B,C,P,Q,R)` [тест на подобие 2-го рода треугольников ABC и PQR]
`Tangent(P,a,Q,R)` [тест на касание прямой $l(P,a)$ и окружности $c(Q,R)$]
`Tangent2(P,Q,R,S)` [тест на касание окружностей $c(P,Q)$ и $c(R,S)$]

[1)] Для удобства формулировок мы будем использовать обозначения: $l(P,v)$ — прямая, проходящая через точку P в направлении вектора v; $c(O,P)$ — окружность с центром в точке O, проходящая через точку P.

`area(A,B,C)` [ориентированная площадь треугольника ABC]
`center(P,Q,R)` [центр окружности, проходящей через точки P, Q, R]
`centroid(A,B,C)` [точка пересечения медиан треугольника ABC]
`conjugate(X)` [выражение, комплексно сопряжённое к выражению X]
`intersection(P,a,Q,b)` [точка пересечения прямых $l(P,a)$ и $l(Q,b)$]
`norm(X)` [квадрат модуля выражения X]
`orthocenter(A,B,C)` [точка пересечения высот треугольника ABC]
`projection(Z,P,a)` [проекция точки Z на прямую $l(P,a)$]
`radical(P,Q,R,S)` [точка пересечения прямой PR и радикальной оси окружностей $c(P,Q)$ и $c(R,S)$][2)]
`reflection(Z,P,a)` [точка, симметричная точке Z относительно прямой $l(P,a)$]
`secondpoint(P,a,Q)` [вторая точка пересечения прямой $l(P,a)$ с окружностью $c(Q,P)$]
`symmetry(Z,P)` [точка, симметричная точке Z относительно точки P]

По сравнению с начальной версией модуль geom претерпел незначительные количественные изменения: удалена редко используемая функция `diametralpoint` и добавлены функции `norm`, `radical` и `secondpoint`. Качественные изменения более существенны, и мы опишем их подробнее.

В первой версии модуля geom все вычисления проводились в *поле рациональных дробей* с коэффициентами из $\mathbb{Q}(i)$. Но иногда в условии задачи отдельные элементы геометрических фигур могут быть конкретизированы. Так, некоторые углы могут иметь *фиксированные величины*, обычно соизмеримые с $180°$ (например, существует довольно много интересных задач, в которых участвуют углы в $60°$ или $120°$). В этом случае при вычислениях появятся рациональные выражения, имеющие коэффициенты из более широкого поля $\mathbb{Q}(i,\zeta)$, где ζ — корень некоторой степени из единицы. При упрощении таких выражений необходимо учитывать, что ζ — *алгебраическое число* и, следовательно, имеются нетривиальные *алгебраические тождества*, связывающие различные степени ζ.[3)] Наше усовершенствование модуля geom состоит в том, что теперь его можно использовать и в этой, более сложной ситуации.

Перейдём к конкретным деталям.

Функция `conjugate` явно или неявно задействована во всех других тестах и функциях, поэтому прежде всего поясним, как она работает. Предполагается, что в рациональных выражениях, подвергающихся комплексному сопряжению, участвуют *специальные переменные* z_k, пробегающие единичную окружность (обычно вполне достаточно шести специальных переменных, именно такое значение принято по умолчанию в `conjugate`). Все остальные переменные, если таковые имеются, считаются *действительными*, т. е. принимающими только вещественные значения. Сопряжение данного выражения состоит, в частности, в замене всех переменных z_k на z_k^{-1}. Кроме того, в сопрягаемом выражении может присутствовать *специальная константа* η, которая всюду заменяется на η^{-1}. По определению, η обозначает такой корень из единицы, что

$$\mathbb{Q}(i,\zeta) = \mathbb{Q}(\eta),$$

где ζ — корень из единицы, который предполагается использовать в вычислениях. Нетрудно видеть, что

$$\deg\eta = \text{НОК}\,(\deg\zeta, \deg i) = \text{НОК}\,(\deg\zeta, 4).$$

[2)] О понятии *радикальной оси* двух окружностей см., например, [5].

[3)] Если, например, ζ — комплексный кубический корень из единицы, то $\zeta^2+\zeta+1=0$.

Для корректной работы функции `conjugate` необходимо проделать следующее: во-первых, воспользоваться командой `alias` для того, чтобы задать η как корень *кругового многочлена* $\Phi_m(x)$, где $m = \deg \eta$, и, во-вторых, задать i и ζ как конкретные степени η.[4)] Сделать всё это нужно *перед* загрузкой модуля geom.

Ниже приводится примерная последовательность начальных команд в случае, когда при решении задачи предполагается задействовать число $\zeta = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ$:

```
> with(numtheory):alias(eta=RootOf(cyclotomic(12,x)=0)):
> i:=eta^3:
> zeta:=eta^2:
> read `geom.txt`:
> with(geom):
```

Несложное программирование остальных процедур основано на утверждениях 1 — 19 из §2 работы [4]. Отметим, что для упрощения рациональных дробей над $\mathbb{Q}(\eta)$ используется команда `factor`, которая, в частности, сокращает числитель и знаменатель дроби на их наибольший общий делитель.

Полный текст модуля geom (файл `geom.txt`) читатель может найти в Приложении. При желании этот модуль легко дополнить другими тестами и функциями, но мы решили остановиться на вышеперечисленных.

§2. Гипотеза о четырёхугольниках Брокара

В этом и следующем параграфах мы исследуем при помощи модуля geom две гипотезы из элементарной геометрии. Обе гипотезы принадлежат А. Заславскому (вторая — в соавторстве с Ф. Ниловым).

Формулировку первой гипотезы — о так называемых четырёхугольниках Брокара — можно найти в статье её автора [6], а также в статье А. Мякишева «Элементарная геометрия и компьютер» (Москва, 2006, см. [7]). Эта гипотеза имеет компьютерное происхождение, так как возникла в результате экспериментов с программой «Живая геометрия» (GSP — the geometer's scetchpad [8] — одна из *систем динамической геометрии*).

Чтобы сформулировать гипотезу, нам понадобится следующее определение, аналогичное классическому определению точки Брокара треугольника (см., например, [9]).

Определение. *Точкой Брокара выпуклой ломаной $ABCD$ такая точка P, для которой*
$$\angle PAB = \angle PBC = \angle PCD. \tag{1}$$

Точку Брокара ломаной $ABCD$ будем обозначать $P(ABCD)$. Можно показать, что она всегда существует и единственна (ниже мы докажем это утверждение в частном случае — для ломаной $ABCD$, вписанной в окружность).

Гипотеза. *Пусть $ABCD$ — вписанный четырёхугольник. Положим*
$$P_1 = P(ABCD), \quad P_2 = P(BCDA), \quad P_3 = P(CDAB), \quad P_4 = P(DABC);$$
$$Q_1 = P(DCBA), \quad Q_2 = P(ADCB), \quad Q_3 = P(BADC), \quad Q_4 = P(CBAD).$$
Тогда четырёхугольники $P_1P_2P_3P_4$ и $Q_1Q_2Q_3Q_4$ равновелики.

4) А именно, положить $i = \eta^{m/4}$ и $\zeta = \eta^{m/\deg\zeta}$. Поскольку НОД $(m/4, m/\deg\zeta) = 1$, можно, если это необходимо, η выразить через i и ζ.

Четырёхугольники $P_1P_2P_3P_4$ и $Q_1Q_2Q_3Q_4$ будем называть *четырёхугольниками Брокара* данного четырёхугольника $ABCD$. Утверждение о том, что они имеют равные площади, представляется удивительным и загадочным — ведь между ними нет никакой видимой связи (например, они даже аффинно не эквивалентны). И всё же, как мы сейчас покажем, гипотеза о четырёхугольниках Брокара верна.

Для доказательства положим

$$A = z_1, \quad B = z_2, \quad C = z_3, \quad D = z_4,$$

где z_k — комплексные числа, по модулю равные единице. Пусть также

$$z = \cos\phi + i\sin\phi,$$

где ϕ — общее значение углов (1). Мы можем записать условие конкурентности трёх прямых PA, PB и PC в виде уравнения и найти из него z. Точнее, поскольку условие конкурентности не меняется при замене z на $-z$, мы сможем определить лишь z^2. И действительно, вычисления с помощью модуля geom приводят к следующей формуле:

$$z^2 = -\frac{z_2^2z_1 - 2z_3z_2z_1 + z_3z_1z_4 - z_4z_3z_2 + z_3^2z_2}{z_3z_2z_1 + 2z_4z_3z_2 - z_2z_1z_4 - z_3z_2^2 - z_4z_3^2}.$$

Далее уже легко найти и саму точку Брокара — например как точку пересечения прямых PA и PB, выражение для которой зависит именно от z^2. Итоговая формула такова:

$$P(ABCD) = \frac{z_1z_2^2z_4 - z_2z_1z_3^2 + z_1z_4z_3^2 - z_1z_4z_3z_2 - z_2^2z_4z_3 + z_3^2z_2^2}{-z_3z_2z_1 - 2z_4z_3z_2 + z_2z_1z_4 + z_3z_2^2 + z_4z_3^2}.$$

Теперь проверка истинности гипотезы сводится к рутинным вычислениям: четырёхугольник $P_1P_2P_3P_4$ нужно разбить на два треугольника $P_1P_2P_3$ и $P_1P_3P_4$, после чего вычислить их площади при помощи функции `area` и сложить; затем то же самое следует проделать с четырёхугольником $Q_1Q_2Q_3Q_4$. В результате возникают два весьма громоздких выражения (мы их не приводим), которые таинственным образом оказываются тождественными, что и доказывает гипотезу А. Заславского о четырёхугольниках Брокара.

Про четырёхугольники Брокара $P_1P_2P_3P_4$ и $Q_1Q_2Q_3Q_4$ известно также следующее. Во-первых, каждый из них является вписанным. Во-вторых, справедливы равенства

$$\frac{|P_1P_2|}{|Q_1Q_2|} = \frac{|BC|}{|CD|}, \quad \frac{|P_2P_3|}{|Q_2Q_3|} = \frac{|CD|}{|DA|}$$

и т. д. Эти факты легко проверяются с помощью модуля geom, но могут быть доказаны и чисто геометрически (как можно понять из статьи [6]), в отличие от по-прежнему интригующей теоремы А. Заславского, синтетическое доказательство которой пока ещё никем не найдено.

§3. Гипотеза о трёх параболах

Вторая гипотеза, которую мы обсудим, предлагалась участникам XX летней конференции Турнира Городов в качестве задачи № 32 в рамках сюжета «Три параболы» (авторы сюжета — А. Заславский и Ф. Нилов, см. [10]).

Для произвольного треугольника ABC построим три параболы Π_a, Π_b и Π_c, каждая из которых проходит через две его вершины и касается в этих вершинах соответствующих сторон (так, например, парабола Π_a проходит через вершины B и C и касается сторон AB и AC).

Гипотеза. *Пусть A^* — точка параболы Π_a, ближайшая к вершине A (аналогично определяются точки B^* и C^*). Тогда прямые AA^*, BB^* и CC^* пересекаются в одной точке.*

Как показывает статистика проверки работ, никто из участников конференции не смог ни доказать, ни опровергнуть эту гипотезу. Далее мы покажем, что гипотеза о трёх параболах не является верной, хотя и имеет под собой некоторые основания.

Прежде всего укажем на одно важное обстоятельство, почему-то не отмеченное авторами сюжета: рассматриваемые параболы хорошо известны в компьютерной графике — это так называемые *кривые Безье* 2-го порядка (см., например, [11]), которые могут быть легко заданы *параметрически*. Так, произвольная точка $P \in \Pi_a$ имеет вид $P = P_a(t)$, где

$$P_a(t) = z_3t^2 + 2z_1t(1-t) + z_2(1-t)^2 \tag{2}$$

и параметр t удовлетворяет условию $0 \leqslant t \leqslant 1$. Как и выше, мы полагаем

$$A = z_1, \quad B = z_2, \quad C = z_3,$$

где z_k — комплексные числа, по модулю равные единице. К формуле (2) можно прийти, применяя, например, *метод неопределённых коэффициентов*. Отметим кстати, что фокус F_a параболы Π_a можно вычислить по формуле

$$F_a = \frac{z_2z_3 - z_1^2}{z_2 + z_3 - 2z_1},$$

а вершина этой параболы получается при $t = t_a$, где

$$t_a = \frac{(z_1 - z_2)(z_3^2 + 3z_2z_3 - 3z_3z_1 - z_1z_2)}{2(z_2 + z_3 - 2z_1)(z_1z_2 + z_3z_1 - 2z_2z_3)}.$$

Используя модуль geom, нетрудно показать, что три прямые $AP_a(t_1)$, $BP_b(t_2)$ и $CP_c(t_3)$ пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $R(t_1, t_2, t_3) = 0$, где

$$R(t_1, t_2, t_3) = 2t_1t_2t_3 - t_1t_2 - t_2t_3 - t_3t_1 + t_1 + t_2 + t_3 - 1.$$

(При сравнении точек пересечения пар прямых $AP_a(t_1)$, $BP_b(t_2)$ и $AP_a(t_1)$, $CP_c(t_3)$ возникает ещё одно выражение

$$S(t_1, t_2, t_3) = t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 - t_1 - t_2 - t_3 + 1 = (1-t_1)(1-t_2)(1-t_3) + t_1t_2t_3,$$

но оно принимает только положительные значения при ограничениях $0 < t_i < 1$.)

Чтобы найти точки A^*, B^* и C^*, нам нужно решить три различных, вообще говоря, *кубических уравнения*.[5)] То, что их вещественные корни t_1^*, t_2^* и t_3^* приведут к *тождеству*

$$R(t_1^*, t_2^*, t_3^*) = 0$$

[5)] Например, для определения точки A^* получим уравнение

$$\frac{d}{dt}\,|AP_a(t)|^2 = 0$$

(и аналогично для точек B^* и C^*). Это уравнение третьей степени, поскольку степень выражения $|AP_a(t)|^2$ по переменной t равна четырём.

относительно переменных z_1, z_2, z_3, кажется маловероятным. И в самом деле, это не так, как показывает следующий пример.

Пусть $z_1 = 1$, $z_2 = i$ и $z_3 = -3/5 - 4i/5$. Тогда

$$t_1^* \approx 0.4563236693, \quad t_2^* \approx 0.5573278623, \quad t_3^* \approx 0.4871604208$$

и, следовательно,

$$R(t_1^*, t_2^*, t_3^*) \approx 0.0004702735$$

(все вычисления — в MAPLE). Таким образом, прямые AA^*, BB^* и CC^* в нашем примере не конкурентны: они, попарно пересекаясь, образуют треугольник. Однако, как показывают дальнейшие вычисления, этот треугольник очень мал (радиус его описанной окружности меньше 0.002) и на практике сливается в точку!

Подобное явление, как показывают эксперименты, наблюдается и в других примерах. Возможно, это и послужило источником гипотезы о трёх параболах, которую можно считать верной лишь с «практической» точки зрения.

§4. Примеры механического решения задач

В этом параграфе, чтобы продемонстрировать новые возможности модуля geom, мы механически решим несколько достаточно сложных олимпиадных геометрических задач.

Первая из этих задач принадлежит выдающемуся популяризатору и настоящему патриоту геометрии И. Ф. Шарыгину (1937 — 2004).

Задача 1. *Дан четырёхугольник $ABCD$. Известно, что*

$$\angle BAC = 30^\circ, \quad \angle CDA = 150^\circ$$

и, кроме того, $|AB| = |BD|$. Докажите, что AC — биссектриса угла $\angle BCD$.

Решение. Пусть $\zeta = \cos 30^\circ + i \sin 30^\circ$. Имеем $\deg \zeta = 12$, поэтому

$$\deg \eta = \text{НОК}\,(\deg \zeta, 4) = 12, \quad i = \eta^3, \quad \zeta = \eta.$$

Положим $D = 0$, $A = 1$ и пусть

$$z_1 = \cos \alpha + i \sin \alpha,$$

где $\alpha = \angle ADB$. Вычислим тоски B и C:

$$B = \frac{z_1^2}{z_1^2 + 1}, \quad C = \frac{(z_1 - \eta)(z_1 + \eta)}{(z_1 - \eta^2)(z_1 + \eta^2)}.$$

Покажем, что точка A равноудалена от прямых CD и CB, что равносильно утверждению задачи. Для этого вычислим её проекции A_1 и A_2 на эти прямые:

$$A_1 = -\eta^2/2 + 1, \quad A_2 = \frac{2z_1^2 - 1}{2z_1^2}.$$

Легко видеть, что $|AA_1| = |AA_2|$, поскольку оба расстояния равны $1/2$. □

Следующая задача предлагалась на зональном этапе XXVI Всероссийской математической олимпиады (1999/2000 уч. год).

Задача 2. *Дан параллелограмм $KLMN$ с углом K, равным $60°$. Точка S — центр окружности, описанной около треугольника KLN. Прямая KS пересекает биссектрису внешнего угла M в точке P. Найдите отношение $|KS|/|SP|$.*

Решение. Применим *Z-параметризацию* к треугольнику KLN (см. [4]). Точки Z_1, Z_2, Z_3 — точки касания вписанной окружности со сторонами LN, NK, KL соответственно. По условию угол K равен $60°$, поэтому $Z_3 = \zeta Z_2$, где

$$\zeta = \cos 120° + i \sin 120°.$$

Здесь $\deg \zeta = 3$, так что

$$\deg \eta = \text{НОК}\,(\deg \zeta, 4) = 12, \quad i = \eta^3, \quad \zeta = \eta^4.$$

Пусть $Z_1 = z_1$, $Z_2 = z_2$, тогда $Z_3 = \eta^4 z_2$. Вычислим вершины параллелограмма $KLMN$:

$$K = 2\eta^2 z_2, \quad L = \frac{2(\eta^2-1)z_1 z_2}{z_1 + z_2(\eta^2-1)}, \quad N = \frac{2z_1z_2}{z_1+z_2}, \quad M = \frac{2(\eta^2-1)(z_1-\eta^2 z_2)z_2^2}{(z_1+z_2(\eta^2-1))(z_1+z_2)}.$$

Найдём центр описанной окружности треугольника KLN:

$$S = \frac{2\eta^2(z_1+\eta^2 z_2)z_1z_2}{(z_1+z_2(\eta^2-1))(z_1+z_2)}.$$

Теперь можно вычислить точку P:

$$P = \frac{2\eta^2(z_1+2\eta^2 z_2)(z_1-\eta^2 z_2)z_2}{(z_1+z_2(\eta^2-1))(z_1+z_2)}.$$

Нам осталось подсчитать квадрат искомого отношения $|KS|/|SP|$. Он оказывается равным $1/4$. Значит, само отношение равно $1/2$. □

А вот эта задача появилась совсем недавно — она была предложена участникам заочного тура VI Олимпиады по геометрии им. И. Ф. Шарыгина (2009/2010 уч. год).

Задача 3. *В треугольнике ABC проведена высота AH. Точки I_b и I_c — центры вписанных окружностей треугольников ABH и ACH; L — точка касания вписанной окружности треугольника ABC со стороной BC. Найдите $\angle LI_bI_c$.*

Решение. Пусть $\zeta = \cos 45° + i\sin 45°$. Здесь $\deg\zeta = 8$, и мы имеем

$$\deg \eta = \text{НОК}\,(\deg \zeta, 4) = 8, \quad i = \eta^2, \quad \zeta = \eta.$$

Положим $A = 0$, $H = 1$ и пусть

$$z_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha, \quad z_2 = \cos\beta + i\sin\beta,$$

где $\alpha = \frac{1}{2}\angle HAB$ и $\beta = \frac{1}{2}\angle HAC$. Вычислим вершины B и C:

$$B = \frac{2}{(z_1-\eta)(z_1+\eta)(z_1-\eta^3)(z_1+\eta^3)}, \quad C = \frac{2z_2^4}{(z_2-\eta)(z_2+\eta)(z_2-\eta^3)(z_2+\eta^3)}.$$

Далее вычислим I_b, I_c, а также I — центр вписанной окружности треугольника ABC:

$$I_b = \frac{\eta^2+1}{(z_1-\eta^3)(z_1+\eta^3)}, \quad I_c = \frac{(\eta^2+1)z_2^2}{(z_2-\eta^3)(z_2+\eta^3)},$$
$$I = \frac{2\eta^2 z_2^2}{(z_1-\eta^3)(z_1+\eta^3)(z_2-\eta^3)(z_2+\eta^3)}.$$

Наконец, вычислим L — как проекцию I на BC:

$$L = \frac{z_1^2 z_2^2 + 2\eta^2 z_2^2 - 1}{(z_1-\eta^3)(z_1+\eta^3)(z_2-\eta^3)(z_2+\eta^3)}.$$

Теперь можно заняться изучением треугольника LI_bI_c. Выясняется, что это равнобедренный прямоугольный треугольник с прямым углом при вершине L. В частности, $\angle LI_bI_c = 45°$. □

Наш последний пример интересен наличием некоторого «внешнего» условия (выделено жирным шрифтом в формулировке задачи), от которого не удаётся избавиться и потому вычисления приходится проводить по модулю этого условия. Задача предлагалась на Открытой олимпиаде физико-математического лицея № 239 (г. Санкт-Петербург) в 2009 году.

Задача 4. *На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC выбраны точки K, L и M соответственно таким образом, что $|AK| = |AM|$ и $|BK| = |BL|$.* ***При этом оказалось, что*** *$\angle MLB = \angle CAB$**.** Докажите, что*

$$|ML| = |KI|, \tag{3}$$

где I — центр вписанной окружности треугольника CML.

Решение. Положим $A = 0$, $K = 1$, $B = 1 + a$ (здесь $a = |BK|$), и пусть

$$z_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha, \quad z_2 = \cos\beta + i\sin\beta,$$

где $\alpha = \frac{1}{2}\angle CAB$ и $\beta = \frac{1}{2}\angle ABC$. Вычислим точки M, L и C:

$$M = z_1^2, \quad L = \frac{(a+1)z_2^2 - a}{z_2^2}, \quad C = \frac{(a+1)(z_1-1)(z_2+1)(z_1^2+1)z_1^4}{(z_1z_2-1)(z_1z_2+1)(z_1^2z_2^2+1)}.$$

Затем можно вычислить точку I (мы не приводим соответствующего выражения по причине его громоздкого вида). Разумеется, равенство (3) не будет выполнено, поскольку параметры z_1, z_2 и a не свободны — они связаны условием

$$\angle MLB = 2\alpha. \tag{4}$$

Используя модуль geom, нетрудно убедиться в том, что условие (4) имеет следствием равенство $f(z_1, z_2, a) = 0$, где

$$f(z_1, z_2, a) = z_2^4 z_1^8 - ((a+1)z_2^4 - az_2^2)z_1^6 - (az_2^2 - a - 1)z_1^2 - 1.$$

Теперь, представляя разность

$$|ML|^2 - |KI|^2$$

в виде рациональной дроби, мы обнаружим, что её числитель делится на многочлен f. Но это означает, что равенство (3) будет иметь место при выполнении условия (4). □

Механическое решение подсказывает следующую идею традиционного решения этой задачи: можно попробовать геометрически доказать, что *четырёхугольник $KMIL$ — равнобокая трапеция* (то, что это правда, легко проверить с помощью модуля geom) и потому его диагонали ML и KI равны. Отдавая дань геометрии, приведём это доказательство.

Сначала мы докажем, что четырёхугольник $KMIL$ — вписанный. Для этого достаточно установить, что

$$\angle MKL + \angle MIL = 180^\circ. \tag{5}$$

Пусть $\gamma = \frac{1}{2}\angle ACB$. Имеем $\angle CML = 2(\alpha - \gamma)$. Следовательно, $\angle MIL = 90^\circ + \gamma$. Поскольку $\angle MKL = \alpha + \beta = 90^\circ - \gamma$, равенство (5) действительно справедливо.

Теперь мы покажем, что стороны MI и KL параллельны:

$$\angle IML = \angle KLM. \tag{6}$$

В самом деле, $\angle IML = \frac{1}{2}\angle CML = \alpha - \gamma$, а $\angle KLM = 2\alpha - \frac{1}{2}(180^\circ - 2\beta) = 2\alpha + \beta - 90^\circ$, так что равенство (6) равносильно соотношению $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$.

Заключение

Как пишут авторы статьи «Геометрические шедевры И. Ф. Шарыгина» (см. в книге [12]), сам Игорь Фёдорович называл *тригонометрию* «киллером» геометрии, поскольку та «часто позволяет найти короткое счётное решение и, тем самым, лишить красивую задачу всякой геометрической идеи». Если бы так! Настоящим «киллером» геометрии является *компьютерная алгебра* с её мощными современными алгоритмами, реализованными на высокопроизводительных компьютерных системах. Дело доходит даже до того, что сами доказательства геометрических теорем уже создаются машинным способом, т. е. печатаются сразу по получении формулировки теоремы, при этом текст доказательства вполне читаем и его можно понять (особенно в этом преуспели китайские математики, см. книгу [13]).

Кроме того, «доказыватели» геометрических теорем, подобные модулю geom, но использующие более тонкий алгебраический аппарат, позволяют не только доказывать, но и открывать новые геометрические факты (те же трудолюбивые китайцы с помощью своего метода Ву и компьютеров нашли много новых теорем, см. [1]).

Такая ситуация истинному любителю геометрии может показаться чересчур печальной. Но в действительности это не так: ведь понять и объяснить истинную природу вновь обнаруженного факта, а также увязать его с уже известными и тем самым получить стройную картину, при помощи механического доказательства в принципе нельзя. Для этого необходимы изысканные методы традиционной геометрии, а механический метод бы стать хорошим подспорьем в поисках настоящего, синтетического рассуждения.

Список литературы

[1] *Chou S.-C.* Mechanical Geometry Theorem Proving. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1988.

[2] *Кокс. Д., Литтл Дж., О'Ши Д.* Идеалы, многообразия и алгоритмы. Введение в вычислительные аспекты алгебраической геометрии и коммутативной алгебры. М.: Мир, 2000.

[3] *Понарин Я.П.* Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах: Книга для учащихся математических классов школ, учителей и студентов педагогических вузов. М.: МЦНМО, 2004.

[4] *Осипов Н.Н.* Ещё раз о механическом доказательстве геометрических теорем // В сб.: Избранные математические работы учеников школы № 10, представленные на научно-практических конференциях НОУ. Вып. 1. Красноярск, 2008. С. 134 — 154.

[5] *Коксетер Г.С.М., Грейтцер С.Л.* Новые встречи с геометрией. М.: Наука, 1978.

[6] `http://www.mccme.ru/mmks/mar08/brocard.pdf`

[7] `http://www.geometry.ru/persons/myakishev/papers/geom_and_komp.pdf`

[8] `http://www.dynamicgeometry.com`

[9] *Прасолов В.В.* Точки Брокара и изогональное сопряжение. М.: МЦНМО, 2004.

[10] `http://www.turgor.ru/lktg/2008/3`

[11] `http://ru.wikipedia.org`

[12] Геометрические олимпиады им. И. Ф. Шарыгина / Сост. *Заславский А.А., Протасов В.Ю., Шарыгин Д.И.* М.: МЦНМО, 2007.

[13] *Chou S.-C., Gao X.-S., Zhang J.-Z.* Machine proofs in geometry: automated production of readable proofs for geometry theorems. Word Scientific Publishing Co., 1994.

Приложение

Здесь помещается распечатка файла `geom.txt`, содержащего программный код модуля geom на языке системы компьютерной алгебры MAPLE.

```
geom:=module()

export

Collinear, Concurrent, Concyclic, Equidistant, Perpendicular,
Similar, Similar2, Tangent, Tangent2, area, center, centroid,
conjugate, intersection, orthocenter, projection, radical,
reflection, secondpoint, symmetry;

option package;

Collinear:=proc(a,b)
if
factor(a*conjugate(b)-conjugate(a)*b)=0
then return TRUE else return FALSE
end if
```

```
end proc;

Concurrent:=proc(P,a,Q,b,R,c)
if
factor(intersection(P,a,Q,b)-intersection(Q,b,R,c))=0
then return TRUE else return FALSE
end if
end proc;

Concyclic:=proc(P,Q,R,S)
if
factor((P-R)*(Q-S)/(Q-R)/(P-S)-conjugate((P-R)*(Q-S)/(Q-R)/(P-S)))=0
then return TRUE else return FALSE
end if
end proc;

Equidistant:=proc(P,Q,R,S)
if
factor(norm(P-Q)-norm(R-S))=0
then return TRUE else return FALSE
end if
end proc;

Perpendicular:=proc(a,b)
if
factor(a*conjugate(b)+conjugate(a)*b)=0
then return TRUE else return FALSE
end if
end proc;

Similar:=proc(A,B,C,P,Q,R)
if
factor(A*Q+B*R+C*P-B*P-C*Q-A*R)=0
then return TRUE else return FALSE
end if
end proc;

Similar2:=proc(A,B,C,P,Q,R)
if
factor(A*conjugate(Q)+B*conjugate(R)+C*conjugate(P)-B*conjugate(P)
-C*conjugate(Q)-A*conjugate(R))=0
then return TRUE else return FALSE
end if
end proc;

Tangent:=proc(P,a,Q,R)
if
```

```
Equidistant(Q,R,Q,projection(Q,P,a))=TRUE
then return TRUE else return FALSE
end if
end proc;

Tangent2:=proc(P,Q,R,S)
if
Equidistant(P,Q,P,radical(P,Q,R,S))=TRUE
then return TRUE else return FALSE
end if
end proc;

area:=(A,B,C)->factor(((conjugate(B)-conjugate(A))*(C-A)
-(B-A)*(conjugate(C)-conjugate(A)))/4/i);

center:=(P,Q,R)->intersection((P+Q)/2,i*(P-Q),(Q+R)/2,i*(Q-R));

centroid:=(A,B,C)->factor((A+B+C)/3);

conjugate:=X->factor(subs(seq(z[k]=1/z[k],k=1..6),eta=1/eta,X));

intersection:=(P,a,Q,b)->factor((a*(Q*conjugate(b)-b*conjugate(Q))
-b*(P*conjugate(a)-conjugate(P)*a))/(a*conjugate(b)-conjugate(a)*b));

norm:=X->factor(X*conjugate(X));

orthocenter:=(A,B,C)->intersection(A,i*(B-C),B,i*(A-C));

projection:=(Z,P,a)->intersection(Z,i*a,P,a);

radical:=(P,Q,R,S)->factor((Q*conjugate(Q)-Q*conjugate(P)
-conjugate(Q)*P-S*conjugate(S)+S*conjugate(R)+conjugate(S)*R
-conjugate(P)*R+P*conjugate(R))/2/conjugate(R-P));

reflection:=(Z,P,a)->symmetry(Z,projection(Z,P,a));

secondpoint:=(P,a,Q)->reflection(P,Q,i*a);

symmetry:=(Z,P)->factor(2*P-Z);

end module:
```